CECyTE
Baja California

Geometría Analítica

CECyTE Baja California

DIRECCIÓN GENERAL

Av. Panamá #199, esquina con Buenos Aires
Colonia Cuauhtémoc Sur
Teléfonos 01 (686) 905 56 00 al 08

Correo Electrónico: docencia@cecytecbc.edu.mx
Página Web: www.cecytebc.edu.mx

GEOMETRÍA ANALÍTICA
Tercer semestre
Bachillerato Tecnológico

Primera Edición

Emma Ayala Rodríguez
Antonio Caro Espino
Alma Rosa Hinojos Robles

Segunda Edición

Luis Ricardo Sánchez Fregoso
José Luis Venegas Neave

Revisión Técnica
Hugo Alberto Beltrán Castillón
Conrado Mendéz Espinoza

En la realización de este material participó:
Alejandra Torres Cota

IMPRESO EN MÉXICO
Segunda edición, 2020
Primera Reimpresión 2021
Segunda Reimpresión 2022

DATOS DE IDENTIFICACIÓN

NOMBRE DEL ALUMNO: ______________________________

CORREO: ______________________________

TELÉFONO: ______________________________

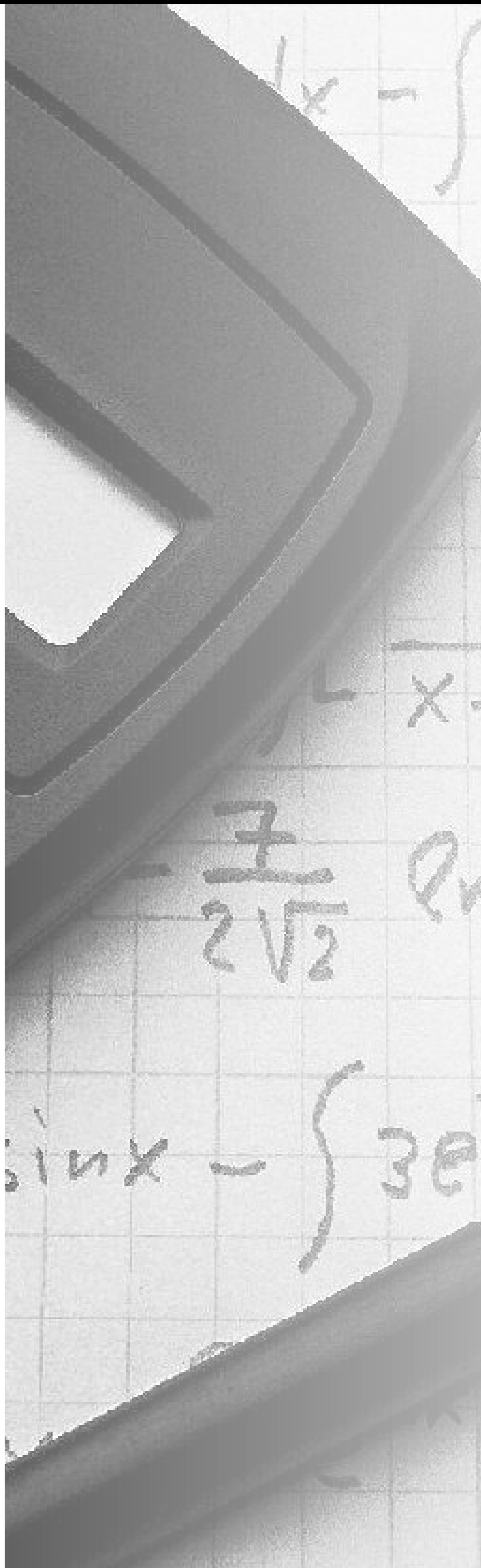
GRUPO: ______________________________

GRADO: ______________________________

PLANTEL: ______________________________

DOCENTE: ______________________________

ÍNDICE




a² - b² = (a - b)
a² + b² =

Aprendizajes clave de la asignatura de Geometría Analítica		
Eje	**Componente**	**Contenido central**
Lugares Geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico.	Sistemas de referencia y localización: Elementos de Geometría Analítica.	◆ La Geometría analítica como método algebraico para la resolución de tareas geométricas. ◆ Tratamiento de los sistemas de coordenadas. ◆ Conceptos básicos del sistema de coordenadas rectangulares, orientación y posición en el plano. El papel del origen de coordenadas en los sitemas de referencia. ◆ Reconocimiento y construcción de los lugares geométricos. Recta, circunferencia, elipse, parábola e Hipérbola. ◆ Tratamiento visual y representaciones múltiples de los lugares geométricos. ◆ Coordenadas rectangulares y paramétricas, puntos singulares, raices y comportamiento asintónico.

En el marco del Nuevo Modelo Educativo, tiene una importancia significativa la jerarquización de los contenidos académicos de la asignatura de Geometría Analítica, con la cual se pretende el desarrollo del pensamiento científico y el favorecimiento de la concepción teórica a partir de casos prácticos de la vida cotidiana de los estudiantes. De la misma forma, se incorporan las Habilidades socioemocionales (HSE) al Marco Curricular Común de la Educación Media Superior, que se concreta desde las asignaturas. Así, en el caso de las asignaturas del 3er semestre, se promoverá el desarrollo de la Dimensión Relaciona T del Ámbito de Desarrollo Socioemocional. El abordaje de las HSE, a lo largo del Bachillerato Tecnológico, puede observarse en la siguiente tabla.

Dimensión	Habilidades generales	Semestre en que se abordará
Conoce T	Autoconocimiento	Primer semestre
	Autorregulación	Segundo semestre
Relaciona T	Conciencia social	Tercer semestre
	Colaboración	Cuarto semestre
Elige T	Toma de decisiones responsables	Quinto semestre
	Perseverancia	Sexto semestre

1 UNIDAD

Propiedades de segmentos rectilíneos y polígonos.

Propósito de la asignatura

Que el estudiante utilice los sistemas coordenados de representación para ubicarse en el plano, desarrolle estrategias para el tratamiento de los lugares geométricos como disposiciones en el plano e incorpore los métodos analíticos a problemas geométricos.

Competencias genéricas.

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.

4. Escucha, interpreta y emite mensajes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

Atributo de las Competencias Genéricas.

1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.

2.1 Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

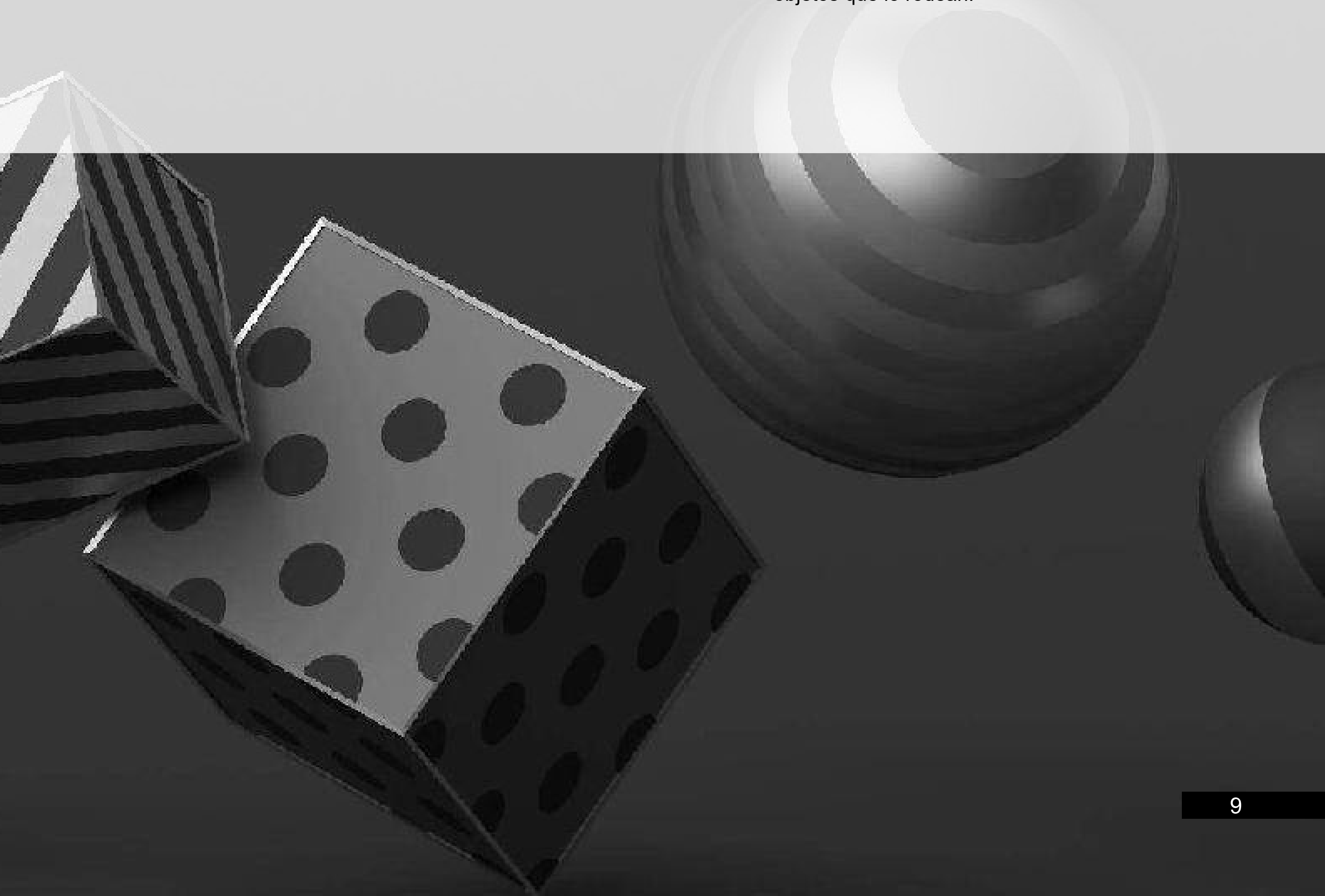
5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

Competencias disciplinares.

M1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

M4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

M6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.



Primera unidad

Eje disciplinar	Componentes
Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico.	Sistemas de referencia y localización: Elementos de Geometría Analítica.

Contenidos centrales	Contenidos específicos	Aprendizajes Esperados
· La Geometría analítica como método algebraico para la resolución de tareas geométricas. El tratamiento de los sistemas de coordenadas. · Conceptos básicos del sistema de coordenadas rectangulares, orientación y posición en el plano. El papel del origen de coordenadas en los sistemas de referencia.	· Propiedades de segmentos rectilíneos y polígonos · Plano cartesiano · Distancia entre dos puntos · Pendiente de una línea recta · Área de un triángulo · Colinealidad · Perímetros y áreas de polígonos · División de un segmento en una razón dada	· Caracteriza de forma analítica los problemas geométricos de localización y trazado de lugares geométricos. · Ubica en el plano, en distintos cuadrantes, y localiza puntos en los ejes y los cuadrantes mediante sus coordenadas. · Interpreta y construye relaciones algebraicas para lugares geométricos. Ecuación general de los lugares geométricos básicos.

PROPIEDADES DE SEGMENTOS RECTILÍNEOS Y POLÍGONOS

1.- ¿Qué figura geométrica carece de dimensiones?

2.- ¿Qué figura geométrica se forma por una sucesión infinita de puntos y sólo posee una dimensión?

3.- ¿Qué es una línea recta?

4.- ¿Cuál es la diferencia entre una recta, una semirrecta y un segmento de recta?

5.- ¿Cuál es la diferencia entre líneas paralelas, perpendiculares y oblicuas?

6.- ¿Qué diferencia hay entre superficie y plano?

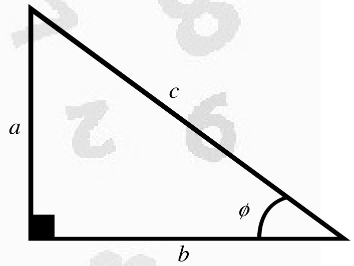
7.- ¿Qué diferencia existe entre calcular el perímetro y el área de una figura?

8.- ¿A qué le llamamos polígonos?

9.- ¿Cómo clasificas lo triángulos en base a sus lados?

10.- ¿Cómo clasificas los triángulos en base a sus ángulos interiores?

En base al triángulo rectángulo de la figura contesta la pregunta 11 y 12.



11.- Escribe las relaciones que determinan las funciones trigonométricas.

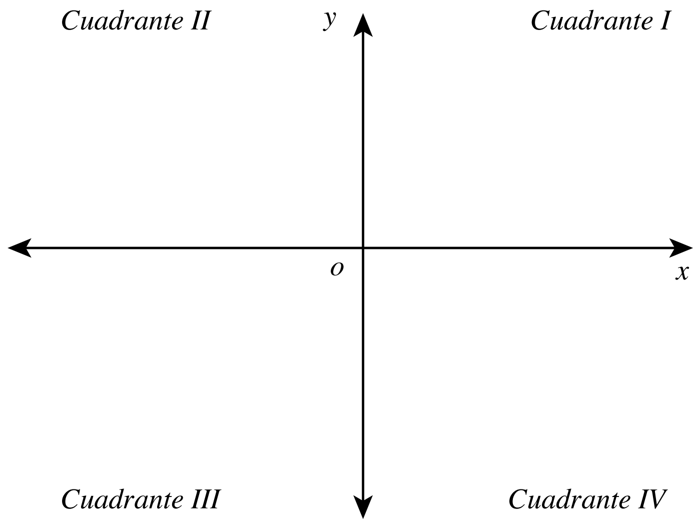
Sen =	*Cos* =	*Tan* =
Csc =	*Sec* =	*Cot* =

12.- Escribe el teorema de Pitágoras.

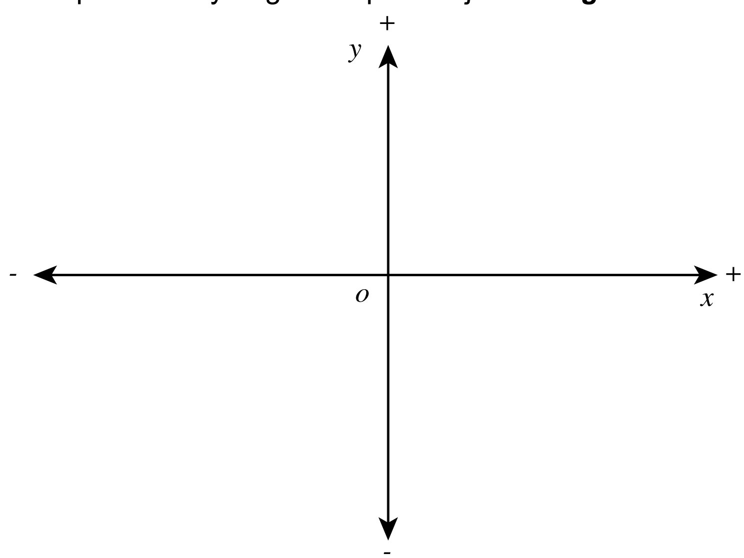
1. PLANO CARTESIANO

Al igual que un pintor, que para poder elaborar su obra artística necesita un lienzo, nosotros en este curso, necesitaremos un sistema de referencia en el cual podamos representar las figuras que resulten de los diversos análisis y cálculos que realizaremos.

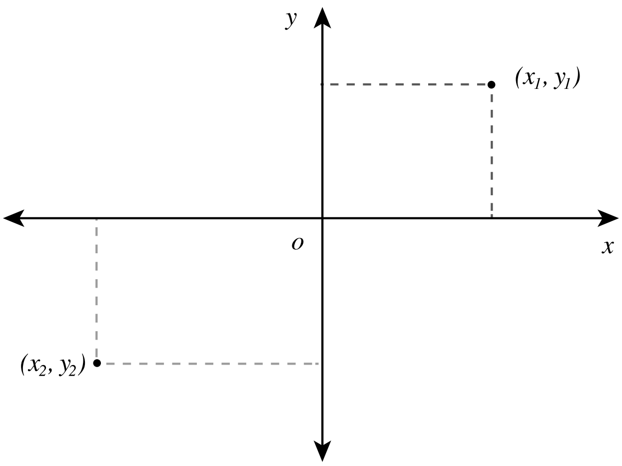
El sistema de referencia que utilizaremos se conoce como ***plano cartesiano,*** el cual se construye a partir de dos líneas que se cortan perpendicularmente, las cuales dividen el plano en cuatro regiones llamadas ***cuadrantes*** y el punto donde se cortan los ejes le llamamos ***origen.***



Convencionalmente para el eje horizontal, el cual lo conoceremos también como el ***eje x***, consideraremos positivos los valores que se encuentren a la derecha y negativos los de la izquierda del origen, de igual modo, para el caso del eje vertical, al cual también llamaremos ***eje y***, consideraremos positivos los valores que se encuentren por arriba y negativos por abajo del ***origen***.



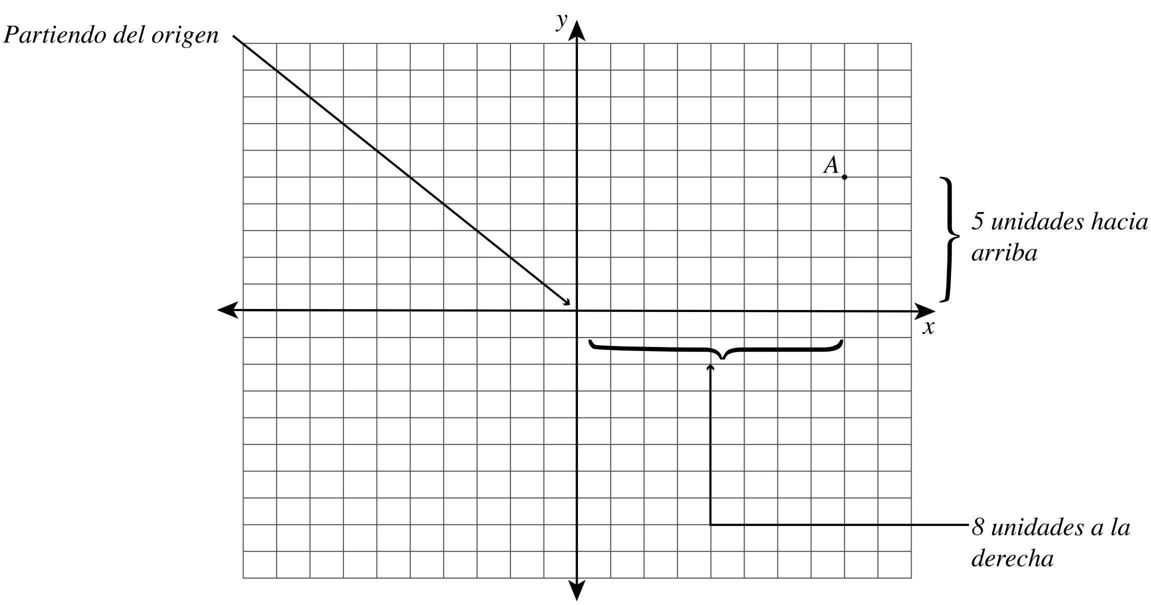
Para representar la ubicación de un punto sobre este plano se utiliza un ***par ordenado*** de números, a los elementos de este par ordenado de números le podemos llamar ***coordenadas*** del punto, donde el primer número representa su ubicación respecto al eje horizontal y el segundo número su ubicación respecto al eje vertical. A la coordenada horizontal se le puede llamar ***abscisa*** y a la coordenada vertical ***ordenada.***



$(x,y) = (Abscisa, Ordenada)$

EJEMPLO

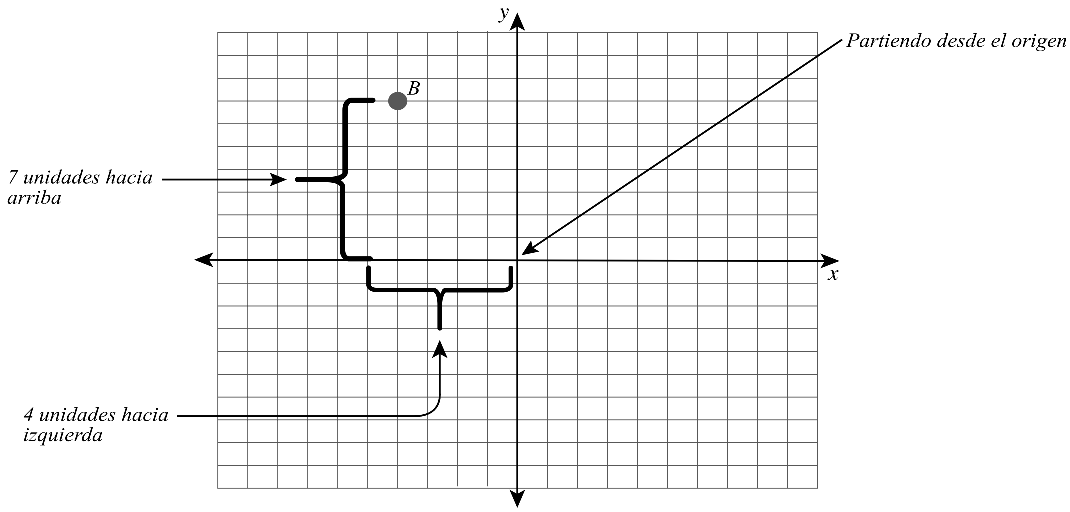
Localiza en el plano cartesiano el punto ***A (8,5)***
El primer valor nos indica que tenemos que avanzar 8 unidades a la derecha del origen, y el segundo valor nos dice que tenemos que avanzar otras 5 unidades, pero ahora hacia arriba.



EJEMPLO

Localiza en el plano cartesiano el punto ***B (-4, 7).***

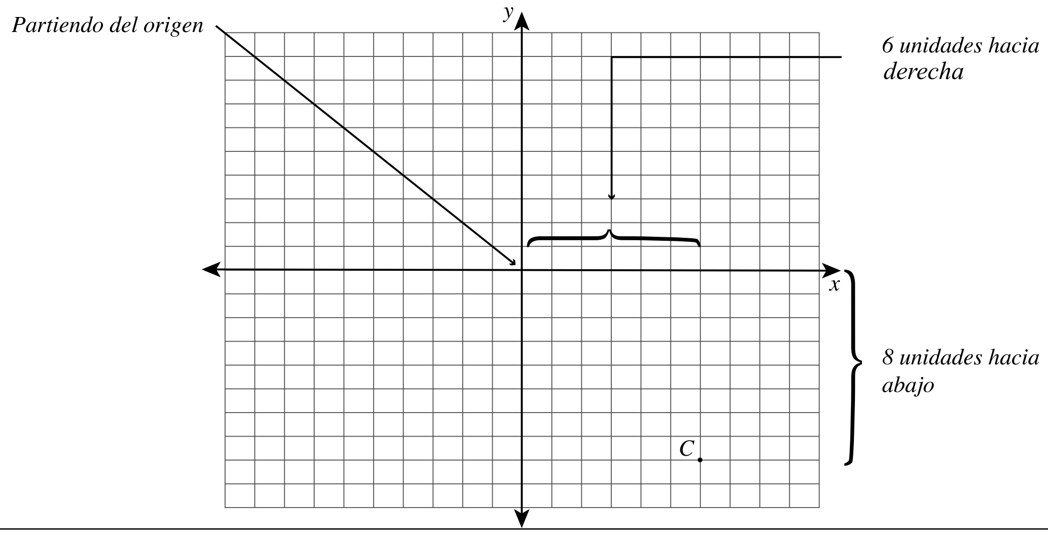
El primer valor nos indica que tenemos que avanzar 4 unidades a la izquierda del origen, y el segundo valor nos dice que tenemos que avanzar otras 7 unidades, pero ahora hacia arriba.



EJEMPLO

Localiza en el plano cartesiano el punto ***C (6, -8).***

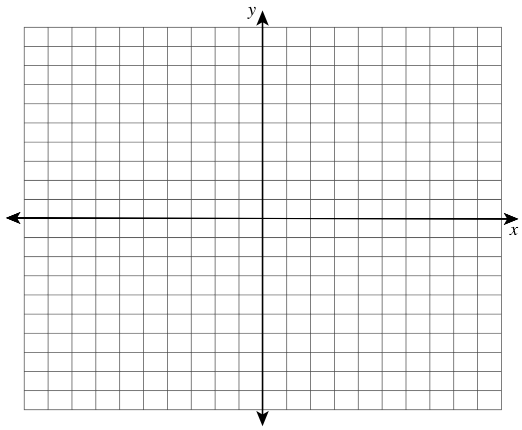
El primer valor nos indica que tenemos que avanzar 6 unidades a la derecha del origen, y el segundo valor nos dice que tenemos que avanzar otras 8 unidades, pero ahora hacia abajo.



ACTIVIDAD 1.

Localiza los siguientes puntos en el plano cartesiano.

$$A(5,9) \quad B(-3,6) \quad C(-7,-4) \quad D(9,-2) \quad E(9,0) \quad y \quad F(0,7)$$



¿Crees que existan otros sistemas de representación a parte del sistema cartesiano?

[1] **Investiga en una fuente confiable el sistema de coordenadas polares.**

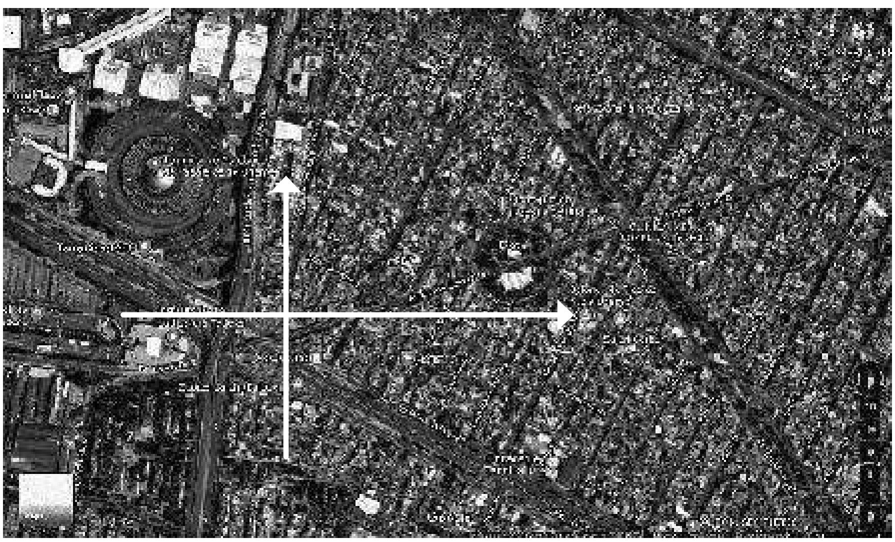
ACTIVIDAD SUGERIDA PARA TRABAJAR

Uso del plano cartesiano

1.- Mediante herramientas de Google, como Google Maps o Planet Earth genera un mapa del lugar donde vives.

2.- Traza las coordenadas cartesianas sobre dicho mapa.

3.- Ubica lugares como farmacia, tortillería, puestos de comida, cercanos a tu casa, utilizando como referencia el plano cartesiano.

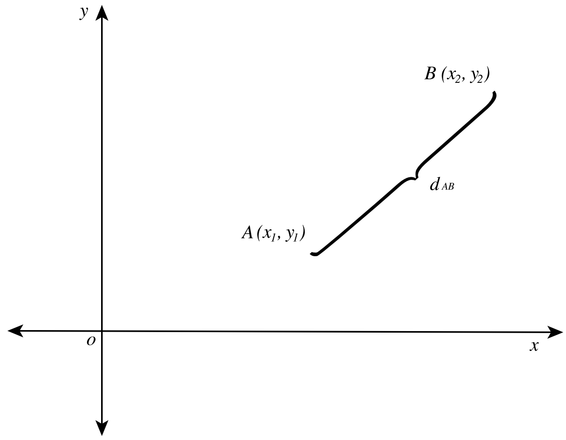


2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos en el plano cartesiano se puede obtener a partir de las coordenadas de cada uno de los puntos.

Dados los puntos ***A (x1, y1) y B (x2, y2)***, la distancia entre ellos la podemos obtener como:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



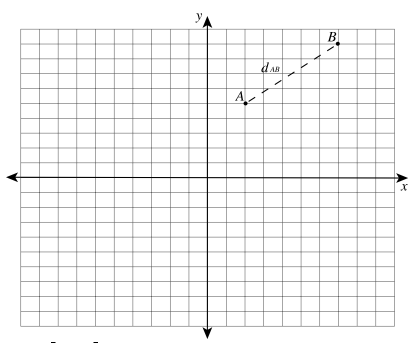
Para realizar el cálculo de la distancia entre dos puntos conocidos, necesitamos seguir dos simples pasos:
Paso 1. Nombrar las coordenadas, es decir que decidamos quien será el punto ***A*** y el punto ***B*** de los puntos entre los cuales queremos calcular la distancia.
Paso 2. Sustituir y hacer el cálculo.

EJEMPLO

Determinar la distancia entre los puntos (2,5) y (7,9).

Paso 1: Nombremos las coordenadas.

$$A(x_1, y_1) = A(2,5) \quad y \quad B(x_2, y_2) = B(7,9)$$



Paso 2: Sustituyamos y calculemos.

$$d_{AB} = \sqrt{(7-2)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{(5)^2 + (4)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

Por la tanto la distancia entre los puntos es de:

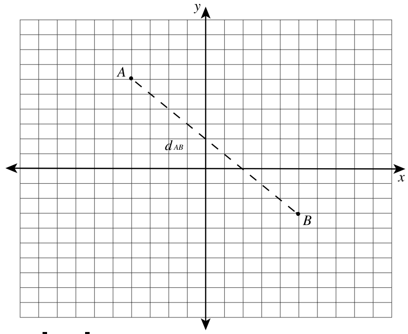
$$d_{AB} = \sqrt{41}$$

EJEMPLO

Determinar la distancia entre los puntos (-4, 6) y (5, -3).

Paso 1: Nombremos las coordenadas.

$$A(x_1, y_1) = A(-4,6) \quad y \quad B(x_2, y_2) = B(5,-3)$$



Paso 2: Sustituyamos y calculemos.

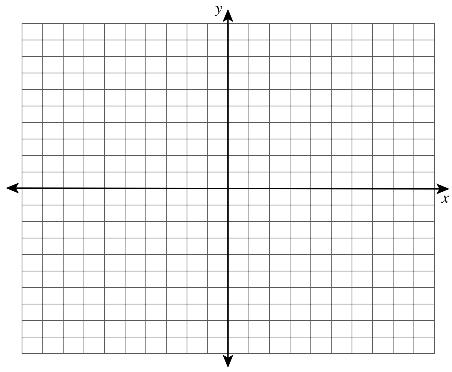
$$d_{AB} = \sqrt{(5-(-4))^2 + (-3-6)^2} = \sqrt{(9)^2 + (-9)^2} = \sqrt{81+81} = \sqrt{162}$$

Por la tanto la distancia entre los puntos es de:

$$d_{AB} = 9\sqrt{2}$$

ACTIVIDAD 2.

Calcula las siguientes distancias entre cada par de puntos. Localiza los puntos en el plano cartesiano identificando cada una de las distancias calculadas. De preferencia indica las distancias con colores distintos.

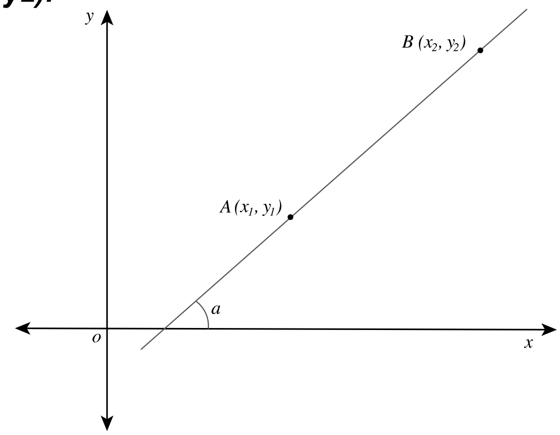


1) $A(7,5)$ y $B(2,1)$ 2) $C(-3,7)$ y $D(5,1)$ 3) $E(-5,1)$ y $F(6,-3)$

4) $G(-4,-7)$ y $H(9,-1)$ 5) $J(0,10)$ y $K(-10,0)$

3. PENDIENTE DE UNA LÍNEA RECTA

Para determinar la pendiente de una línea recta que pasa por los puntos ***A (x1, y1) y B (x2, y2).***



Aplicamos la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A partir del valor de la pendiente podemos determinar el ángulo < que la línea recta hace con respecto al eje horizontal.

$$= \arctan(m) = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

Para realizar el cálculo de la pendiente de la recta que pasa por dos puntos conocidos, necesitamos seguir **dos simples pasos:**

Paso 1. Nombrar las coordenadas, es decir, que decidamos quien será el punto ***A*** y el punto ***B*** de los puntos a partir de los cuales queremos calcular la pendiente.

Paso 2. Sustituir y hacer el cálculo, para este caso, si además queremos calcular el ángulo de la recta con el eje horizontal necesitamos aplicar la función de arco para la tangente de la pendiente obtenida.[2]

[2] Las funciones de arco son comúnmente llamadas funciones inversas. Se recomienda el uso de calculadora científica para determinar estos valores.

EJEMPLO

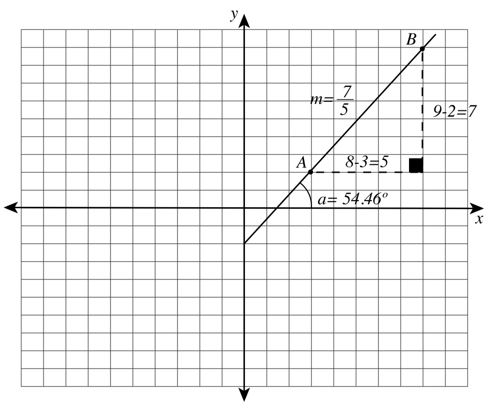
Para la línea recta que pasa por los puntos ***(3, 2) y (8, 9)***, determinar la pendiente y el ángulo que forma con el eje horizontal.

Paso 1: Nombremos las coordenadas.

$$A(x_1, y_1) = A(3,2) \quad y \quad B(x_2, y_2) = B(8,9)$$

Paso 2: Sustituyamos y calculemos.

$$m = \frac{9-2}{8-3} = \frac{7}{5} \qquad = \arctan\left(\frac{7}{5}\right) \approx 54.46^o$$



EJEMPLO

Para la línea recta que pasa por los puntos ***(-5, 7) y (4, -2),*** determinar la pendiente y el ángulo que forma con el eje horizontal.

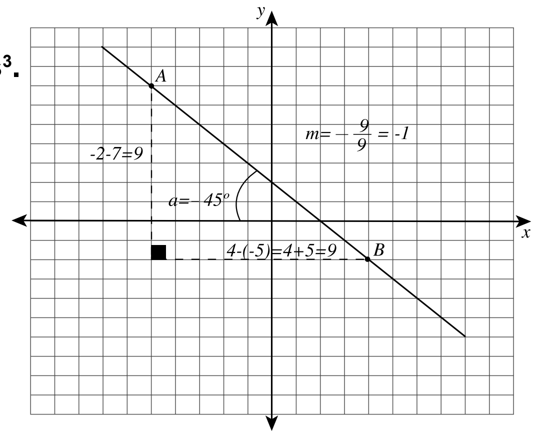
Paso 1: Nombremos las coordenadas.

$$A(x_1, y_1) = A(-5,7) \quad y \quad B(x_2, y_2) = B(4,-2)$$

Paso 2: Sustituyamos y calculemos[3].

$$m = \frac{-2-7}{4-(-5)} = \frac{-9}{9} = -1$$

$$= \arctan(-1) = -45^{o}$$



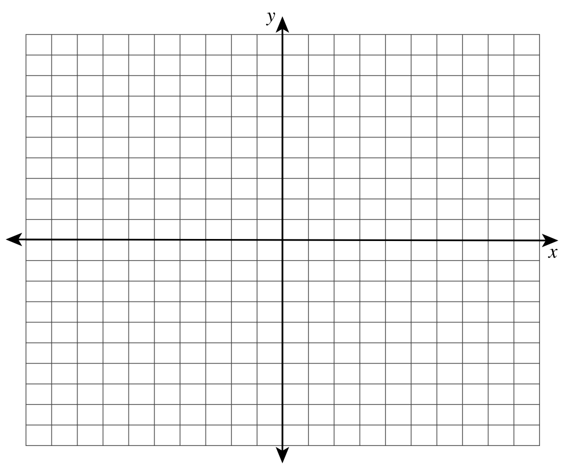
[3] En este caso el cálculo de la pendiente será negativo, por lo al aplicar la operación de arco para la pendiente, el ángulo también será negativo. En este caso un ángulo negativo representa un ángulo medido también desde el eje horizontal, pero siguiendo el sentido de las manecillas del reloj.

En resumen, como dirían los clásicos, los ángulos positivos se miden en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y los negativos en el sentido que se mueven las manecillas del reloj.

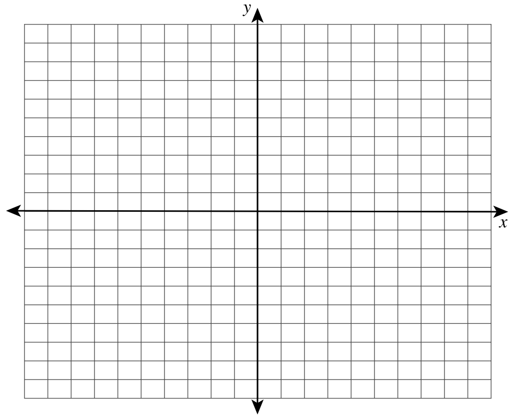
ACTIVIDAD 3.

Determina la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos y determina el ángulo de esta recta con el eje horizontal. Grafica cada una de las líneas rectas.

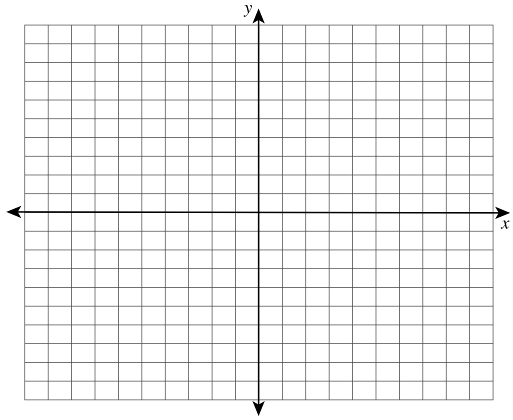
1) $A(5\ 7) \quad y \quad B(1\ 2)$



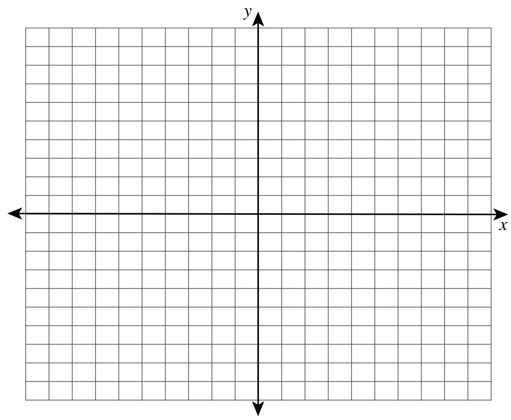
2) $A(-7,3)$ y $B(1,5)$



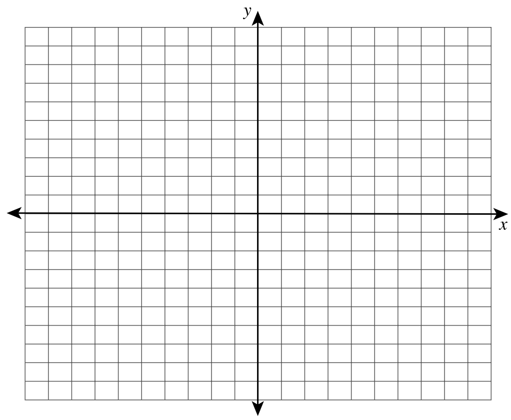
3) $A(1,-5)$ y $B(-3,6)$



4) $A(-7,-4)$ y $B(-2,-2)$

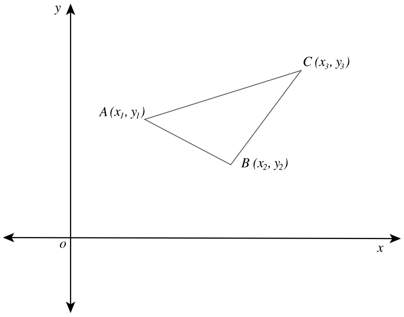


5) $A(5,0)$ y $B(0,-8)$



4. ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Si los puntos de ***A (x1, y1), B (x2, y2)*** y ***C (x3, y3)*** representan los vértices de un triángulo en el plano cartesiano



Su área la podemos calcular como:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)}{2}$$

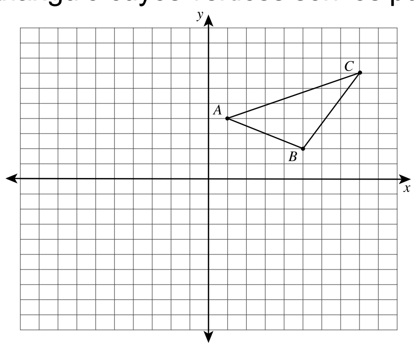
Para realizar el cálculo del área de un triángulo a partir de las coordenadas de los vértices solo tenemos que:

Paso 1. Nombrar las coordenadas, decidir quién será el punto ***A, B y C.***

Paso 2. Sustituir y hacer el cálculo.

EJEMPLO

Determinar el área de un triángulo cuyos vértices son los puntos ***(1, 4), (5, 2) y (8, 7).***



Paso 1: Nombremos las coordenadas.

$$A(x_1, y_1) = A(1,4) \quad B(x_2, y_2) = B(5,2) \quad y \quad C(x_3, y_3) = C(8,7)$$

Paso 2: Sustituyamos y calculemos.

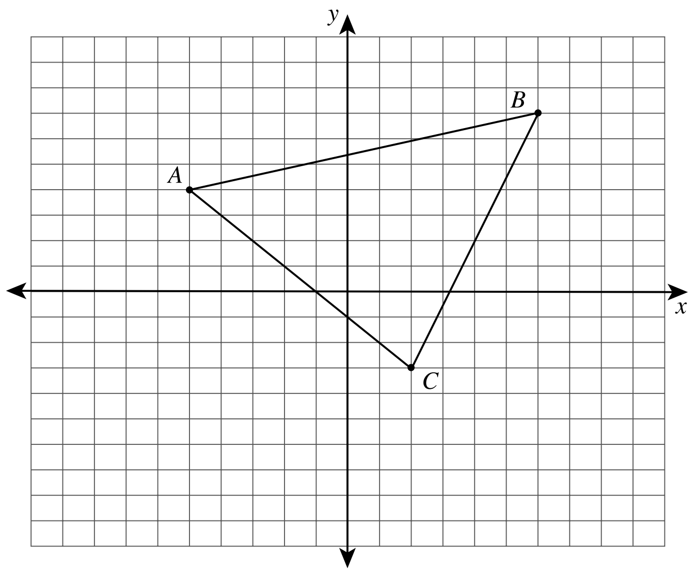
$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \\ 8 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{(2 + 35 + 32_1) - (20 + 16 + 7)}{2} = \frac{69 - 43}{2} = \frac{23}{2} = 11.5$$

Por lo tanto, el área del triángulo formado es de:

$$A_{ABC} = 11.5u^2$$

EJEMPLO

Determinar el área de un triángulo cuyos vértices son los puntos ***(-5, 4), (6, 7) y (2, -3).***



Paso 1: Nombremos las coordenadas.

$$A(x_1, y_1) = A(-5,4) \quad B(x_2, y_2) = B(6,7) \quad y \quad C(x_3, y_3) = C(2,-3)$$

Paso 2: Sustituyamos y calculemos.

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 6 & 7 \\ 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{(-35-18+8)-(24+14+15)}{2} = \frac{-45-53}{2} = -\frac{98}{2} = -49$$

Observación: Cuando al hacer el cálculo del área esta resulta negativa, consideraremos sólo el valor numérico como el área de la figura. [4]

Por lo tanto, el área del triángulo formado es de:

$$A_{ABC} = 49u^2$$

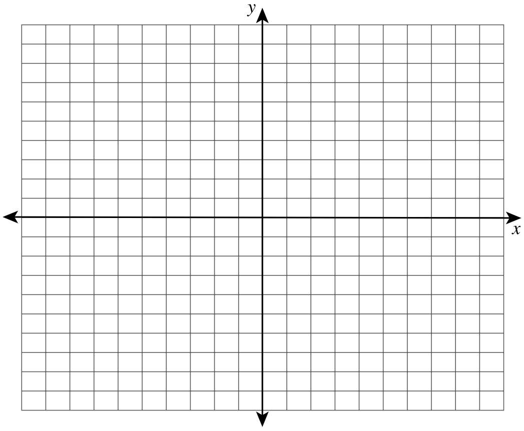
[4] **Estrictamente hablando, el área del polígono es el valor absoluto de la fórmula establecida.**

$$Si \quad a > 0 \quad \Rightarrow \quad |a| = a \quad pero \quad si \quad a < 0 \quad \Rightarrow \quad |a| = -a$$

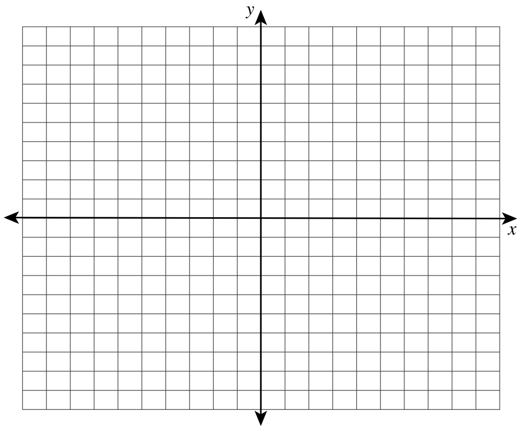
ACTIVIDAD 4.

Grafica cada uno de los triángulos y determina su área.

1) $A(1,7)\quad B(-7,8)\quad y\quad C(4,-5)$

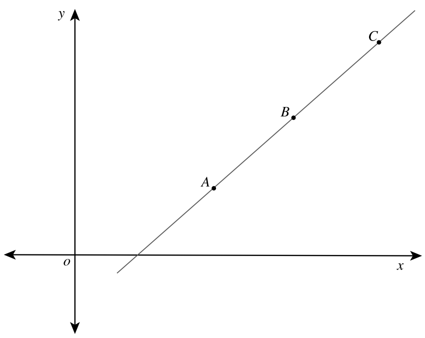


2) $A(6,9)\quad B(-7,1)\quad y\quad C(9,-2)$



5. COLINEALIDAD

Cuando dos o más puntos forman parte de la misma línea recta, se les conoce como puntos colineales.



Para probar si tres puntos son colineales con los elementos que hemos revisado hasta ahora tenemos **tres alternativas:**

1) Mediante las distancias: si los puntos son colineales, entonces la suma de las dos distancias menores debe ser igual a la distancia mayor.

$$d_{AB} + d_{BC} = d_{AC}$$

2) Mediante las pendientes: si los puntos son colineales, entonces, cualquier combinación de dos puntos para calcular las pendientes resultan iguales.

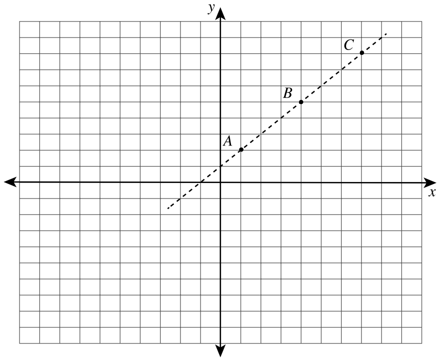
$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

3) Mediante el cálculo del área de un triángulo: si partimos del supuesto de que los tres puntos representan los vértices de un triángulo, entonces serán colineales si el área resultante es cero.

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$$

EJEMPLO

Determinar si los puntos **A (1,8), B (4,23) y C (7,38)** *son colineales.*



Método 1: Mediante las distancias:

Primero calculemos las distancias

dAB:

$$A(x_1, y_1) = A(1{,}8) \quad y \quad B(x_2, y_2) = B(4{,}23) \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (23-8)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(3)^2 + (15)^2} = \sqrt{9+225} = \sqrt{234} = 3\cdot\sqrt{26}$$

dBC:

$$B(x_1, y_1) = B(4{,}23) \quad y \quad C(x_2, y_2) = C(7{,}38) \quad \Rightarrow \quad d_{BC} = \sqrt{(7-4)^2 + (38-23)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(3)^2 + (15)^2} = \sqrt{9+225} = \sqrt{234} = 3\cdot\sqrt{26}$$

dAC:

$$A(x_1, y_1) = A(1{,}8) \quad y \quad C(x_2, y_2) = C(7{,}38) \quad \Rightarrow \quad d_{AC} = \sqrt{(7-1)^2 + (38-8)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(6)^2 + (30)^2} = \sqrt{36+900} = \sqrt{936} = 6\cdot\sqrt{26}$$

Podemos observar que se cumple:

$$d_{AB} + d_{BC} = d_{AC} \quad \Rightarrow \quad 3\cdot\sqrt{26} + 3\cdot\sqrt{26} = 6\cdot\sqrt{26} \quad \therefore \quad son \quad colineales.$$

Método 2: Mediante las pendientes:
Primero calculemos las pendientes

m_{AB}:

$$A(x_1, y_1) = A(1,8) \quad y \quad B(x_2, y_2) = B(4,23) \quad \Rightarrow \quad m_{AB} = \frac{23-8}{4-1} = \frac{15}{3} = 5$$

m_{BC}:

$$B(x_1, y_1) = B(4,23) \quad y \quad C(x_2, y_2) = B(7,38) \quad \Rightarrow \quad m_{BC} = \frac{38-23}{7-4} = \frac{15}{3} = 5$$

m_{AC}:

$$A(x_1, y_1) = A(1,8) \quad y \quad C(x_2, y_2) = B(7,38) \quad \Rightarrow \quad m_{AC} = \frac{38-8}{7-1} = \frac{30}{6} = 5$$

Podemos observar que se cumple

$$m_{AB} = m_{BC} = m_{Ac} \qquad m_{AB} = m_{BC} = m_{Ac} = 5 \quad \therefore \quad son\ colineales$$

Método 3: Mediante el cálculo del área de un triángulo
Para calcular el área nombremos los puntos.

$$A(x_1, y_1) = A(1,8) \quad B(x_2, y_2) = B(4,23) \quad y \quad C(x_3, y_3) = C(7,38)$$

Sustituyamos y calculemos utilizando la fórmula.

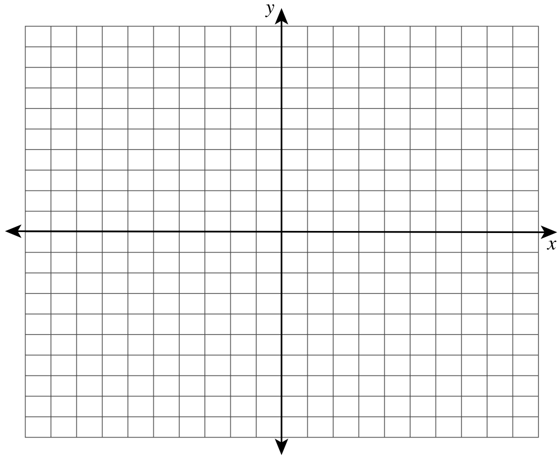
$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 23 \\ 7 & 38 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = \frac{(23+152+56)-(32+161+38)}{2} = \frac{(231)-(231)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$como \quad A_{ABC} = 0 \quad \therefore \quad son \quad colineales.$$

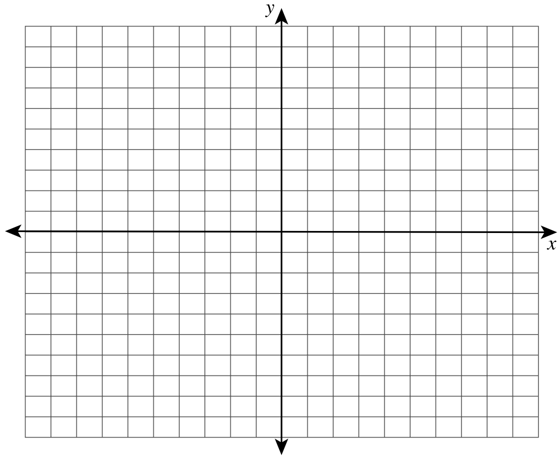
ACTIVIDAD 5.

Determina la colinealidad de los puntos en cada caso. Determina la colinealidad de las tres formas propuestas anteriormente. Gráfica los puntos.

1) $A(2,1)$ $B(3,4)$ y $C(7,16)$



2) $A(1,3)$ $B(-1,17)$ y $C(-5,45)$



6. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

Cálculo del perímetro.

Para calcular el perímetro de un polígono necesitamos:

Paso 1: Calcular cada una de las longitudes de los lados utilizando

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Paso 2: Sumar las longitudes de todos los lados.

Área de un polígono.

Para calcular el área de un polígono necesitamos:

Paso 1: Dividir el polígono en triángulos.

Paso 2: Calcular el área de los triángulos utilizando:

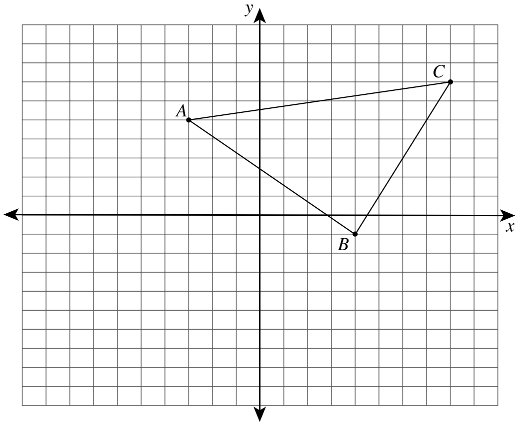
$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)}{2}$$

Paso 3: Sumar el área de los triángulos generados.

Es recomendable graficar los polígonos en ambos casos.

EJEMPLO

Determina el perímetro y el área del triángulo cuyos vértices vienen dados por los puntos ***A (-3, 5), B (4, -1) y C (8, 7).***



Determinemos el perímetro del triángulo.

Paso 1

Para calcular el perímetro de este triángulo determinemos las longitudes: ***dAB, dAC y dBC,***

Longitud $\boldsymbol{d_{AB}}$

$$A(x_1, y_1) = A(-3,5) \quad y \quad B(x_2, y_2) = B(4,-1) \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = \sqrt{(4-(-3))^2 + (-1-5)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(7)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49+36} = \sqrt{85} \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = \sqrt{85} \approx 9.22$$

Longitud d_{BC}

$$B(x_1, y_1) = B(4,-1) \quad y \quad C(x_2, y_2) = C(8,7) \quad \Rightarrow \quad d_{BC} = \sqrt{(8-4)^2 + (7-(-1))^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(4)^2 + (8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} \quad \Rightarrow \quad d_{BC} = \sqrt{80} \approx 8.94$$

Longitud d_{AC}

$$A(x_1, y_1) = A(-3,5) \;\; y \;\; C(x_2, y_2) = C(8,7) \Rightarrow d_{AC} = \sqrt{(8-(-3))^2 + (7-5)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(11)^2 + (2)^2} = \sqrt{121+4} = \sqrt{125} \quad \Rightarrow \quad d_{AC} = \sqrt{125} \approx 11.18$$

Paso 2

Sumemos las longitudes obtenidas.

$$P = d_{AB} + d_{BC} + d_{AC} = 9.22 + 8.94 + 11.18 = 29.34$$

Por lo tanto, el perímetro del triángulo obtenido será:

$$P \approx 29.34 \; u$$

Ahora calculemos el área del triángulo.

Como sólo es un triángulo podemos realizar directamente el cálculo

Nombramos los puntos:

$$A(x_1, y_1) = A(-3,5), \quad B(x_2, y_2) = B(4,-1) \quad y \quad C(x_3, y_3) = C(8,7)$$

Sustituimos y calculamos

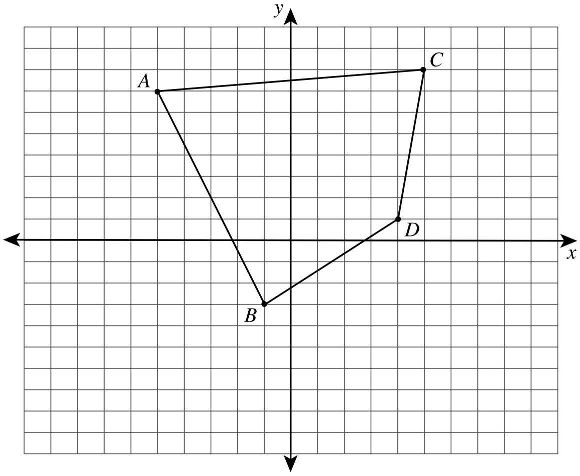
$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -1 \\ 8 & 7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{(3+28+40)-(20-8-21)}{2} = \frac{(71)-(-9)}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

Por lo tanto, el área del triángulo será:

$$A_{ABC} = 40 \quad u^2$$

EJEMPLO

Determina el perímetro y el área del cuadrilátero cuyos vértices vienen dados por los puntos ***A (-5, 7), B (-1, -3), C (5, 8) y D (4, 1)***.



Determinemos el perímetro del cuadrilátero.

Paso 1

Para calcular el perímetro de este cuadrilátero determinemos las longitudes: ***d_{AB}, d_{BD}, d_{CD}, y d_{AC}.***

Longitud ***d_{AB}***.

$$A(x_1, y_1) = A(-5,7) \quad y \quad B(x_2, y_2) = B(-1,-3) \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = \sqrt{(-1-(-5))^2 + (-3-7)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(4)^2 + (-10)^2} = \sqrt{16+100} = \sqrt{116} \quad \Rightarrow \quad d_{AB} = \sqrt{116} \approx 10.77$$

Longitud ***d_{BD}***.

$$B(x_1, y_1) = B(-1,-3) \quad y \quad D(x_2, y_2) = D(4,1) \quad \Rightarrow \quad d_{BD} = \sqrt{(4-(-1))^2 + (1-(-3))^2}$$

$$d_{BD} = \sqrt{(5)^2 + (4)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41} \quad \Rightarrow \quad d_{BD} = \sqrt{41} \approx 6.40$$

Longitud ***d_{CD}***.

$$C(x_1, y_1) = C(5,8) \quad y \quad D(x_2, y_2) = D(4,1) \quad \Rightarrow \quad d_{CD} = \sqrt{(4-5)^2 + (1-8)^2}$$

$$d_{CD} = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} \quad \Rightarrow \quad d_{CD} = \sqrt{50} \approx 7.07$$

Longitud **d_{AC}**.

$$A(x_1, y_1) = A(-5{,}7) \quad y \quad C(x_2, y_2) = C(5{,}8) \quad \Rightarrow \quad d_{AC} = \sqrt{(5-(-5))^2 + (8-7)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(10)^2 + (1)^2} = \sqrt{100+1} = \sqrt{101} \quad \Rightarrow \quad d_{AC} = \sqrt{101} \approx 10.05$$

Paso 2

Sumemos las longitudes obtenidas.

$$P = d_{AB} + d_{BD} + d_{CD} + d_{AC} = 10.77 + 6.40 + 7.07 + 10.05 = 34.29$$

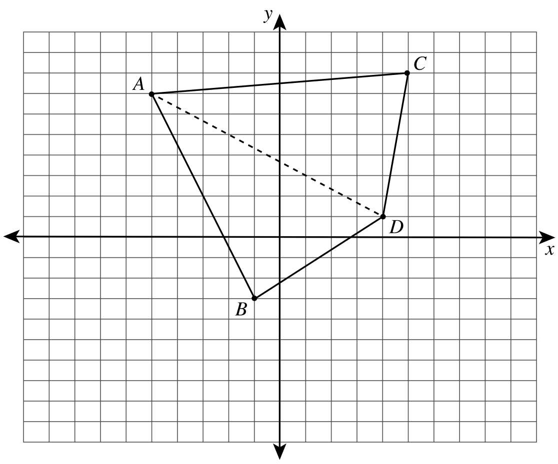
Por lo tanto, el perímetro del cuadrilátero obtenido será:

$$P \approx 34.29 \quad u$$

Ahora calculemos el área del cuadrilátero.

Paso 1

Dividamos en triángulos el cuadrilátero, trazando una línea del punto ***A*** al punto ***D***, como se muestra en la figura.



Esto nos va a generar dos triángulos, el triángulo ***ABD*** y el triángulo ***ADC***

Paso 2

Calculemos el área de cada triángulo.

Área del triángulo ***ABD.***

$$A(x_1, y_1) = A(-5{,}7), \quad B(x_2, y_2) = B(-1,-3) \quad y \quad D(x_3, y_3) = D(4{,}1)$$

Sustituyendo en la fórmula

$$A_{ABD} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -1 & -3 \\ 4 & 1 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = \frac{(15-1+28)-(-7-12-5)}{2} = \frac{(42)-(-24)}{2} = \frac{66}{2} = 33$$

Área del triángulo ***ADC.***

$$A(x_1, y_1) = A(-5{,}7), \quad D(x_2, y_2) = D(4{,}1) \quad y \quad C(x_3, y_3) = C(5{,}8)$$

Sustituyendo en la fórmula

$$A_{ADC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 4 & 1 \\ 5 & 8 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = \frac{(-5+32+35)-(28+5-40)}{2} = \frac{(62)-(-7)}{2} = \frac{69}{2} = 34.5$$

Paso 3

Sumamos las áreas de los triángulos generados.

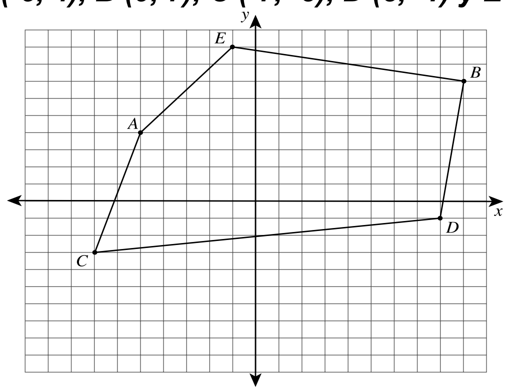
$$A_{ABD} + A_{ADC} = 33 + 34.5 = 67.5$$

Por lo tanto, el área del cuadrilátero será:

$$A = 67.5 \quad u^2$$

EJEMPLO

Determina el perímetro y el área de un polígono de 5 lados cuyos vértices vienen dados por los puntos ***A (-5, 4), B (9, 7), C (-7, -3), D (8, -1) y E (-1, 9).***



Determinemos el perímetro del polígono

Paso 1

Para calcular el perímetro de este polígono determinemos las longitudes: ***d_{AC}, d_{CD}, d_{BD}, d_{BE} y d_{AE}.***

Longitud ***d_{AC}.***

$$A(x_1, y_1) = A(-5{,}4) \quad y \quad C(x_2, y_2) = C(-7{,}-3) \quad \Rightarrow \quad d_{AC} = \sqrt{(-7-(-5))^2 + (-3-4)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53} \quad \Rightarrow \quad d_{AC} = \sqrt{53} \approx 7.28$$

Longitud ***d_{CD}.***

$$C(x_1, y_1) = C(-7{,}-3) \quad y \quad D(x_2, y_2) = D(8{,}-1) \quad \Rightarrow \quad d_{CD} \quad \sqrt{(8-(-7))^2 + (-1-(-3))^2}$$

$$d_{CD} = \sqrt{(15)^2 + (2)^2} = \sqrt{225+4} = \sqrt{229} \quad \Rightarrow \quad d_{CD} = \sqrt{229} \approx 15.13$$

Longitud ***d_{BD}.***

$$B(x_1, y_1) = B(9{,}7) \quad y \quad D(x_2, y_2) = D(8{,}-1) \quad \Rightarrow \quad d_{BD} = \sqrt{(8-9)^2 + (-1-7)^2}$$

$$d_{BD} = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65} \quad \Rightarrow \quad d_{BD} = \sqrt{65} \approx 8.06$$

Longitud ***d_{BE}.***

$$B(x_1, y_1) = B(9{,}7) \quad y \quad E(x_2, y_2) = E(-1{,}9) \quad \Rightarrow \quad d_{BE} = \sqrt{(-1-9)^2 + (9-7)^2}$$

$$d_{BE} = \sqrt{(-10)^2 + (2)^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104} \quad \Rightarrow \quad d_{BE} = \sqrt{104} \approx 10.20$$

Longitud ***d_{AE}.***

$$A(x_1, y_1) = A(-5{,}4) \quad y \quad E(x_2, y_2) = E(-1{,}9) \quad \Rightarrow \quad d_{AE} = \sqrt{(-1-(-5))^2 + (9-4)^2}$$

$$d_{AE} = \sqrt{(4)^2 + (5)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41} \quad \Rightarrow \quad d_{AE} = \sqrt{41} \approx 6.40$$

Paso 2

Sumemos las longitudes obtenidas.

$$P = d_{AC} + d_{CD} + d_{BD} + d_{BE} + d_{AE} = 7.28 + 15.13 + 8.06 + 10.20 + 6.40 = 47.07$$

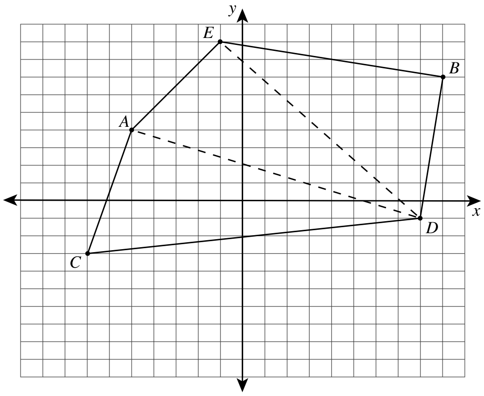
Por lo tanto, el perímetro del polígono será:

$$P \approx 47.07 \quad u$$

Ahora calculemos el área del polígono.

Paso 1

Dividamos en triángulos el polígono, trazando una línea del punto ***A*** al punto ***D*** y otra línea del punto ***D*** al punto ***E***, como se muestra en la figura.



Esto nos va a generar tres triángulos, el triángulo ***ACD***, el triángulo ***ADE*** y el triángulo ***BED.***

Paso 2

Calculemos el área de cada triángulo.

Área del triángulo ***ACD.***

$$A(x_1,y_1)=A(-5,4),\quad C(x_2,y_2)=C(-7,-3)\quad y\quad D(x_3,y_3)=D(8,-1)$$

Sustituyendo en la fórmula

$$A_{ACD}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-5 & 4\\ -7 & -3\\ 8 & -1\\ -5 & 4\end{vmatrix}=\frac{(15+7+32)-(-28-24+5)}{2}=\frac{(54)-(-47)}{2}=\frac{101}{2}=50.5$$

Área del triángulo ***ADE.***

$$A(x_1,y_1)=A(-5,4),\quad D(x_2,y_2)=D(8,-1)\quad y\quad E(x_3,y_3)=E(-1,9)$$

Sustituyendo en la fórmula

$$A_{ADE}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-5 & 4\\ 8 & -1\\ -1 & 9\\ -5 & 4\end{vmatrix}=\frac{(5+72-4)-(32+1-45)}{2}=\frac{(73)-(-12)}{2}=\frac{85}{2}=42.5$$

Área del triángulo ***BED.***

$$B(x_1, y_1) = B(9,7), \quad E(x_2, y_2) = E(-1,9) \quad y \quad D(x_3, y_3) = D(8,-1)$$

Sustituyendo en la fórmula

$$A_{BED} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ -1 & 9 \\ 8 & -1 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = \frac{(81+1+56)-(-7+72-9)}{2} = \frac{(138)-(56)}{2} = \frac{82}{2} = 41$$

Paso 3

Sumamos las áreas de los triángulos generados.

$$A_{ACD} + A_{ADE} + A_{BED} = 50.5 + 42.5 + 41 = 134$$

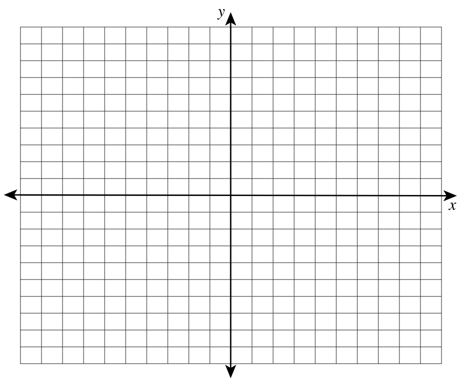
Por lo tanto, el área del polígono será

$$A = 134 \quad u^2$$

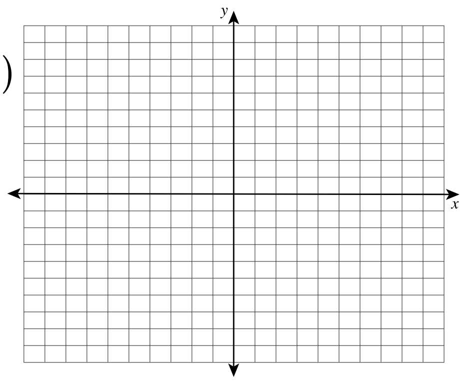
ACTIVIDAD 6.

Traza la gráfica de cada polígono y a partir de sus vértices, calcula el perímetro y el área para cada uno.

1) $A(2,1) \quad B(-3,4) \quad C(-7,-6) \quad y \quad D(4,-5)$



2) $A(-1,-1) \ B(1,5) \ C(5,7) \ D(6,-1) \ y \ E(1,-7)$

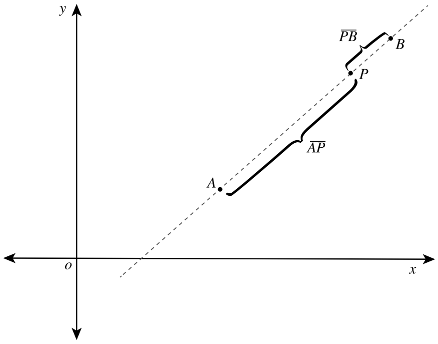


¿Habrá otra manera de calcular el área?
Investiga.

7. DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Podemos dividir un segmento de recta determinando una razón de longitudes, esta razón se calculará estableciendo la longitud a partir de uno de los extremos del segmento al punto que lo dividirá y del punto que lo dividirá al otro extremo.

Si tenemos un segmento de recta cuyos extremos son ***A*** y ***B*** y el punto ***P*** es el punto que partirá a dicho segmento como se muestra en la figura.



La razón que divide a dicho segmento se puede establecer como:

$$r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

Si las coordenadas de los puntos extremos son ***A (x1, y1)*** y ***B (x2, y2)***, para determinar las coordenadas del punto ***P (x, y)*** que divide al segmento dada una razón ***r***, utilizaremos las fórmulas.

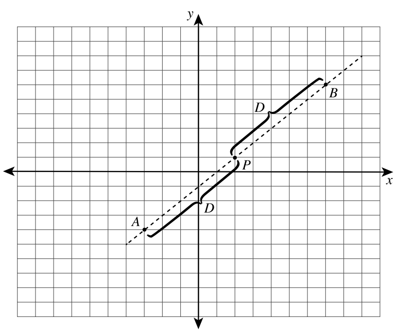
$$x = \frac{x_1 + x_2 r}{1+r} \quad y \quad y = \frac{y_1 + y_2 r}{1+r} \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{x_1 + x_2 r}{1+r}, \frac{y_1 + y_2 r}{1+r}\right)$$

EJEMPLO

Encontrar el punto que divide en dos partes iguales al segmento de recta que va del punto ***A (-3,-4)*** al ***B (7,6).***

Llamemos ***P*** al punto que dividirá el segmento que va de ***A*** a ***B*** en dos partes, nuestro objetivo será entonces encontrar las coordenadas de este punto.

Aunque desconocemos las distancias que hay entre los extremos y el punto ***P,*** lo que sí sabemos, es que este punto dividirá al segmento en dos partes iguales. Asignemos una distancia ***D*** entre cada par de puntos, como se muestra en la figura.



A partir de aquí podemos establecer la razón entre los extremos y el punto que divide al segmento, determinemos la razón ***r.***

$$r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{D}{D} = 1$$

Entonces si.

$$A(x_1, y_1) = A(-3,-4) \quad B(x_2, y_2) = B(7,6) \quad y \quad P(x, y)$$

Aplicando las fórmulas.

$$x = \frac{x_1 + x_2 r}{1 + r} \quad y \quad y = \frac{y_1 + y_2 r}{1 + r} \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{x_1 + x_2 r}{1 + r}, \frac{y_1 + y_2 r}{1 + r}\right)$$

Tenemos.

$$x = \frac{-3 + 7(1)}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2 \quad y \quad y = \frac{-4 + 6(1)}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad P(2,1)$$

Podemos concluir el punto que divide en dos partes iguales al segmento es:

$$P(2,1)$$

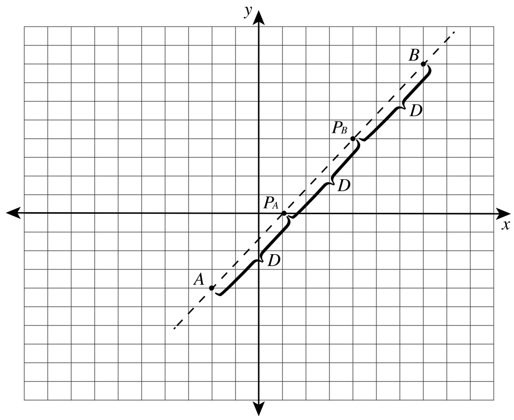
A este punto le podemos llamar punto medio.

EJEMPLO

Encontrar los puntos que dividen en tres partes iguales al segmento de recta que va del punto ***A (-2,-4)*** al ***B (7,8).***

Llamemos P_A y P_B a los puntos que dividirán el segmento que va de ***A*** a ***B*** en tres partes, nuestro objetivo será entonces encontrar las coordenadas de estos puntos.

Aunque desconocemos las distancias que hay entre los extremos y los puntos P_A y P_B, lo que sí sabemos, es que estos puntos dividirán el segmento en tres partes iguales. Asignemos una distancia ***D*** entre cada par de puntos, como se muestra en la figura.



A partir de aquí podemos establecer la razón entre los extremos y los puntos que dividen al segmento.

Encontremos primero el punto P_A, determinemos la razón ***r.***

$$r = \frac{\overline{AP_A}}{\overline{P_A B}} = \frac{D}{2D} = \frac{1}{2}$$

Entonces si

$$A(x_1, y_1) = A(-2,-4) \quad B(x_2, y_2) = B(7,8) \quad y \quad P_A(x, y)$$

Aplicando las fórmulas

$$x = \frac{x_1 + x_2 r}{1+r} \quad y \quad y = \frac{y_1 + y_2 r}{1+r} \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{x_1 + x_2 r}{1+r}, \frac{y_1 + y_2 r}{1+r}\right)$$

Tenemos

$$x = \frac{-2 + 7\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1 \quad y \quad y = \frac{-4 + 8\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{0}{\frac{3}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_A(1,0)$$

Ahora encontremos el punto $\boldsymbol{P_B}$, empezando por determinemos la razón ***r.***

$$r = \frac{\overline{AP_A}}{\overline{P_AB}} = \frac{2D}{D} = 2$$

Entonces si.

$$A(x_1, y_1) = A(-2,-4) \quad B(x_2, y_2) = B(7,8) \quad y \quad P_B(x, y)$$

Aplicando de nuevo las fórmulas.

$$x = \frac{x_1 + x_2 r}{1+r} \quad y \quad y = \frac{y_1 + y_2 r}{1+r} \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{x_1 + x_2 r}{1+r}, \frac{y_1 + y_2 r}{1+r}\right)$$

Tenemos:

$$x = \frac{-2 + 7(2)}{1+2} = \frac{12}{3} = 4 \quad y \quad y = \frac{-4 + 8(2)}{1+2} = \frac{12}{3} = 4 \quad \Rightarrow \quad P_B(4,4)$$

Podemos concluir que los puntos que dividen en tres partes iguales al segmento son los puntos.

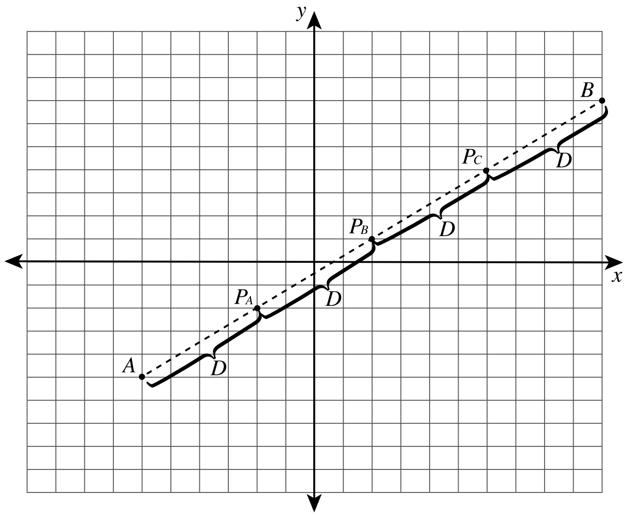
$$P_A(1,0) \quad y \quad P_B(4,4)$$

EJEMPLO

Encontrar los puntos que dividen en cuatro partes iguales al segmento de recta que va del punto ***A (-6,-5)*** al ***B (10,7).***

Llamemos P_A, P_B y P_C a los puntos que dividirán el segmento que va de ***A*** a ***B*** en cuatro partes, nuestro objetivo será entonces encontrar las coordenadas de estos puntos.

Aunque desconocemos las distancias que hay entre los extremos y los puntos P_A, P_B y P_C, lo que sí sabemos, es que estos puntos dividirán el segmento en cuatro partes iguales. Asignemos una distancia ***D*** entre cada par de puntos, como se muestra en la figura.



A partir de aquí podemos establecer la razón entre los extremos y los puntos que dividen al segmento.

Encontremos primero el punto P_A, determinemos la razón ***r.***

$$r = \frac{\overline{AP_A}}{\overline{P_A B}} = \frac{D}{3D} = \frac{1}{3}$$

Entonces si.

$$A(x_1, y_1) = A(-6,-5) \quad B(x_2, y_2) = B(10,7) \quad y \quad P_A(x, y)$$

Aplicando las fórmulas:

$$x = \frac{x_1 + x_2 r}{1 + r} \quad y \quad y = \frac{y_1 + y_2 r}{1 + r} \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{x_1 + x_2 r}{1 + r}, \frac{y_1 + y_2 r}{1 + r}\right)$$

Tenemos:

$$x=\frac{-6+10\left(\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}}=-2 \quad y \quad y=\frac{-5+7\left(\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}}=-2 \quad \Rightarrow \quad P_A(-2,-2)$$

Ahora encontremos el punto $\boldsymbol{P_B}$, empezando por determinemos la razón ***r.***

$$r=\frac{\overline{AP_A}}{\overline{P_AB}}=\frac{2D}{2D}=1$$

Entonces si.

$$A(x_1,y_1)=A(-6,-5) \quad B(x_2,y_2)=B(10,7) \quad y \quad P_B(x,y)$$

Aplicando de nuevo las fórmulas:

$$x=\frac{x_1+x_2r}{1+r} \quad y \quad y=\frac{y_1+y_2r}{1+r} \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{x_1+x_2r}{1+r},\frac{y_1+y_2r}{1+r}\right)$$

Tenemos:

$$x=\frac{-6+10(1)}{1+1}=\frac{4}{2}=2 \quad y \quad y=\frac{-5+7(1)}{1+1}=\frac{2}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad P_B(2,1)$$

Ahora encontremos el punto $\boldsymbol{P_C}$, empezando por determinemos la razón ***r.***

$$r=\frac{\overline{AP_C}}{\overline{P_CB}}=\frac{3D}{D}=3$$

Entonces si.

$$A(x_1,y_1)=A(-6,-5) \quad B(x_2,y_2)=B(10,7) \quad y \quad P_C(x,y)$$

Aplicando de nuevo las fórmulas:

$$x=\frac{x_1+x_2r}{1+r} \quad y \quad y=\frac{y_1+y_2r}{1+r} \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{x_1+x_2r}{1+r},\frac{y_1+y_2r}{1+r}\right)$$

Tenemos:

$$x=\frac{-6+10(3)}{1+3}=\frac{24}{4}=6 \quad y \quad y=\frac{-5+7(3)}{1+3}=\frac{16}{4}=4 \quad \Rightarrow \quad P_B(6,4)$$

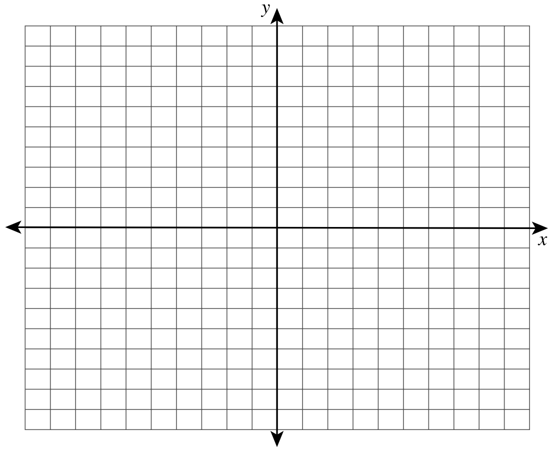
Podemos concluir que los puntos que dividen en tres partes iguales al segmento son los puntos.

$$P_A(-2,-2) \quad P_B(2,1) \quad y \quad P_C(6,4)$$

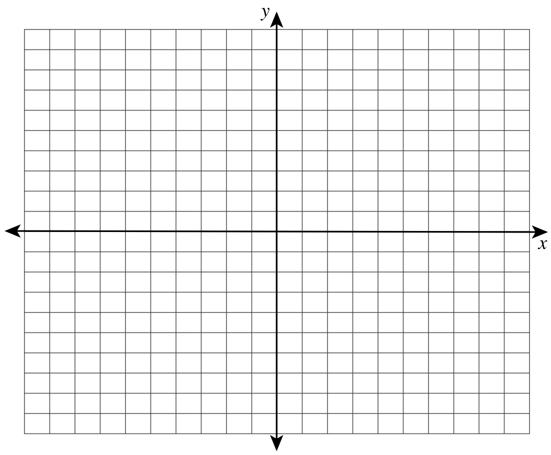
ACTIVIDAD 7.

Encuentra los puntos que dividen en dos, tres y cuatro partes iguales los segmentos de recta formados entre los puntos indicados a continuación. Gráfica los puntos.

1) $A(-5,2)$ y $B(9,-6)$



2) $A(-8,8)$ y $B(8,-8)$



EJERCICIO DE REPASO DE LA UNIDAD 1

Parte I. Entre cada par de puntos, calcula la distancia entre ellos.

1) $(4,7)$ y $(8,-4)$

2) $(-4,7)$ y $(-7,-4)$

3) $(2,-3)$ y $(5,-4)$

4) $(8,-9)$ y $(-12,11)$

5) $(-8,-9)$ y $(-10,-11)$

Parte II. Si por cada par de puntos dados en la *parte I*, pasa una línea recta, determina la pendiente y el ángulo con respecto al eje horizontal en cada caso.

Parte III. Calcula el perímetro y el área para cada polígono.

1) $(2,-3)$ $(4,2)$ y $(-5,-2)$

2) $(0,4)$ $(-8,0)$ y $(-1,-4)$

3) $(2,5)$ $(7,1)$ $(3,-4)$ y $(-2,3)$

4) $(0,4)$ $(1,-6)$ $(-2,-3)$ y $(-4,2)$

5) $(1,5)$ $(-2,4)$ $(-3,-1)$ $(2,-3)$ y $(5,1)$

Parte IV. Determina si los puntos dados en cada caso son colineales o no.

1) $(2,3)$ $(-4,7)$ y $(5,8)$

2) $(4,1)$ $(5,-2)$ y $(6,-5)$

3) $(-1,-4)$ $(2,5)$ y $(7,-2)$

4) $(0,5)$ $(5,0)$ y $(6,-1)$

5) $(-2,1)$ $(3,2)$ y $(6,3)$

Parte V. Encuentre los puntos que dividan en dos, tres y cuatro partes iguales cada segmento de recta entre los vértices indicados.

1) $(-5,4)$ y $(8,-7)$

2) $(12,15)$ y $(-8,-5)$

3) $(15,0)$ y $(0,-20)$

PROBLEMAS PARA PONERTE A PRUEBA

1.-Determina si los puntos $A\ (-3,8)$ $B\ (2,7)$ y $C\ (8.5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

2.- Determina el área de un triángulo cuyos vértices son:

$$A(-7,5) \quad B(1,1) \quad y \quad C(-3,3)$$

3.- Determina el área de un triángulo cuyos vértices son:

$$A(x, y+z) \quad B(y, x+z) \quad y \quad C(z, x+y)$$

4.- El ángulo formado por la recta que pasa por los puntos $(-4,5)$ y $(3,y)$ con la recta que pasa por los puntos $(-2,4)$ y $(9,1)$ es de 135º. Hallar el valor de la coordenada **y.**

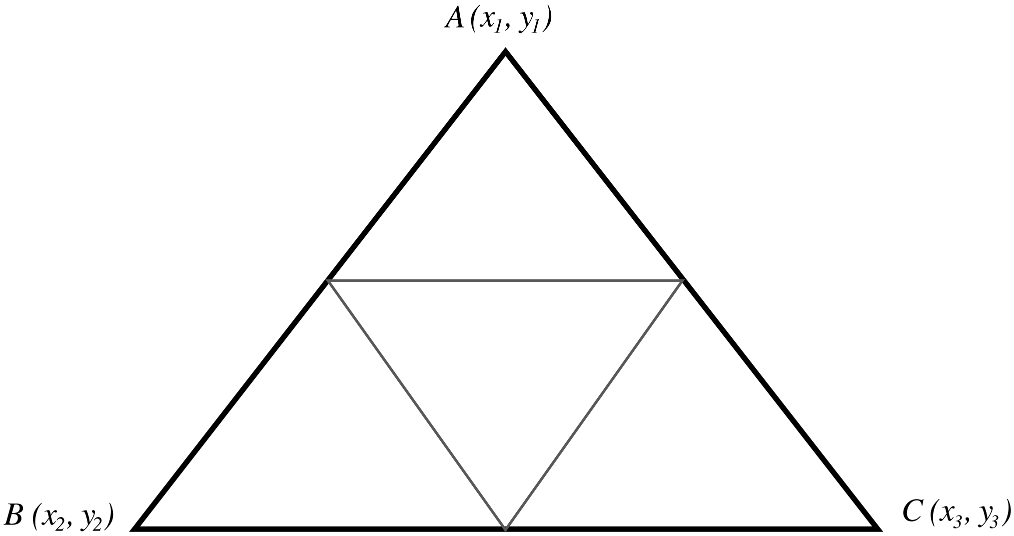
5.- Encuentra el punto que equidista a los puntos $A(8,5)$ $B(9,4)$ y $C(2,-3)$.

6.- Las coordenadas de los puntos medios de los lados de un triángulo son $A(5,2)$ $B(2,-3)$ y $C(-2,1)$, encuentra las coordenadas de los vértices.

7.- Demostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los vértices.

8.- Determina el área de un triángulo cuyos vértices son los puntos medios de un triángulo mayor. Considere que las coordenadas del triángulo mayor son:

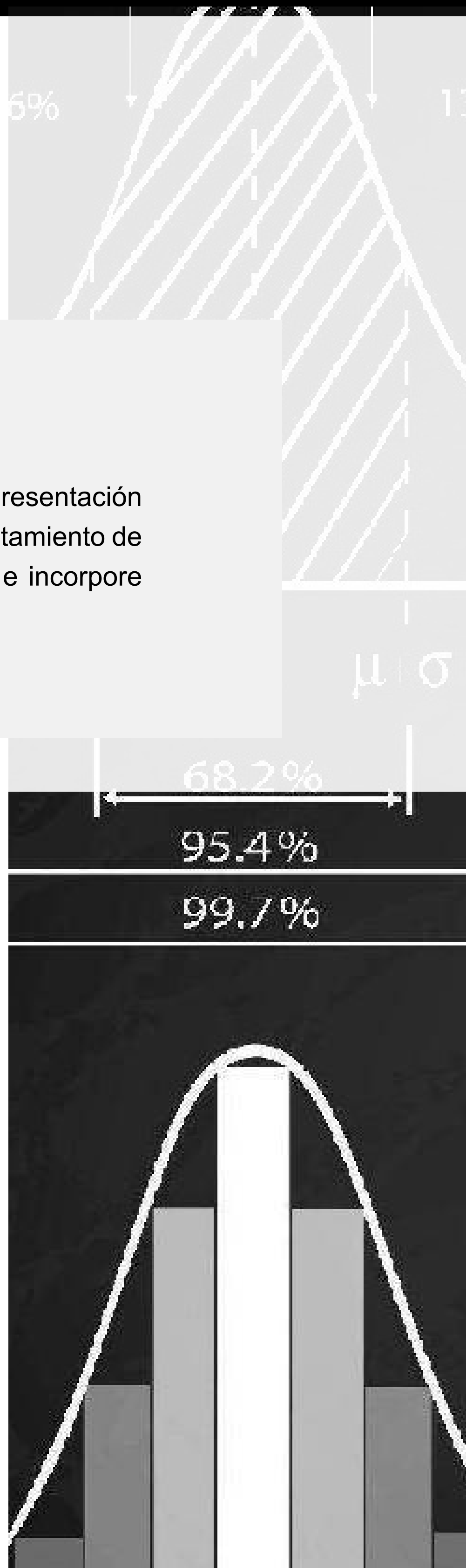
$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2) \quad y \quad C(x_3, y_3)$$



¿Qué relación encuentra entre el triángulo pequeño y el grande?

2 UNIDAD

La línea recta como lugar geométrico.



Propósito de la asignatura

Que el estudiante utilice los sistemas coordenados de representación para ubicarse en el plano, desarrolle estrategias para el tratamiento de los lugares geométricos como disposiciones en el plano e incorpore los métodos analíticos a problemas geométricos.

Competencias genéricas.

4. Escucha, interpreta y emite mensajes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

Atributo de las Competencias Genéricas.

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

4.2 Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.

5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

7.2 Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.

Competencias disciplinares.

M1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

M4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

M6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

Segunda unidad

Eje disciplinar	Componentes
Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico.	Sistemas de referencia y localización: Elementos de Geometría analítica.

Contenidos centrales	Contenidos específicos	Aprendizajes Esperados
· Reconocimiento y construcción de los lugares geométricos: La recta:	· La línea recta · Introducción a la línea recta · Retomando la pendiente e inclinación de una recta · La ecuación de la recta y sus representaciones · Análisis del comportamiento de dos rectas · Distancia de un punto a una recta · Distancia entre dos rectas paralelas · Ángulo entre dos rectas	· Interpreta y construye relaciones algebraicas para lugares geométricos. · Ecuación general de los lugares geométricos. · Caracteriza y distingue a los lugares geométricos según sus disposiciones y sus relaciones.

Instrucciones: Lee cuidadosamente y contesta lo que se pide en cada uno de los siguientes reactivos, subrayando la opción correcta.

Nota: Realiza los procedimientos con números claros y legibles, simplifica al máximo el resultado cuando sea posible.

1.- Simplifica la siguiente fracción: $\frac{5-(-3)}{6+(-8)}$

Procedimiento:

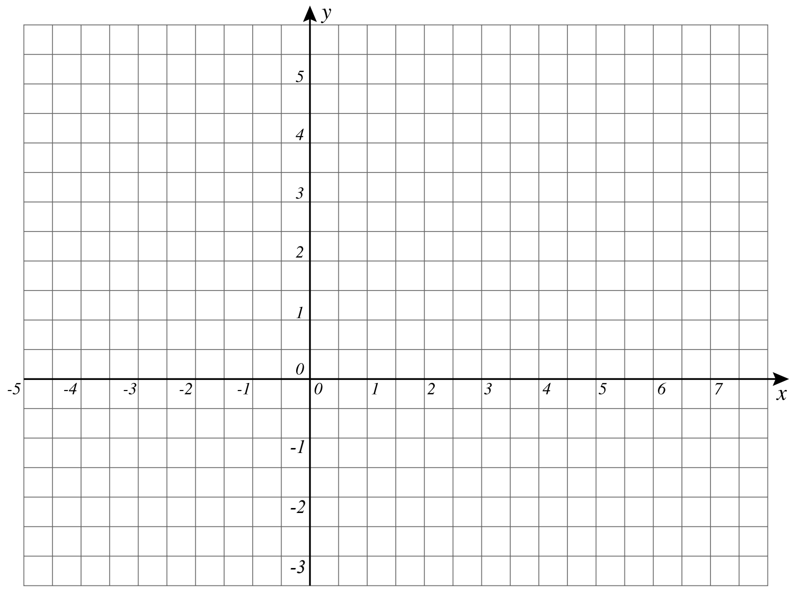
a) -4 b) $\frac{-4}{7}$ c) – 1 d) $\frac{4}{7}$

2. Encuentra el punto medio del segmento formado por los siguientes pares ordenados: A (4, 6) y B (-3,-5).

Procedimiento:

a) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{4}\right)$ b) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{-3}{2},\frac{4}{3}\right)$ d) $\left(\frac{-1}{3},\frac{-4}{5}\right)$

3. Traza un ángulo de 50°.



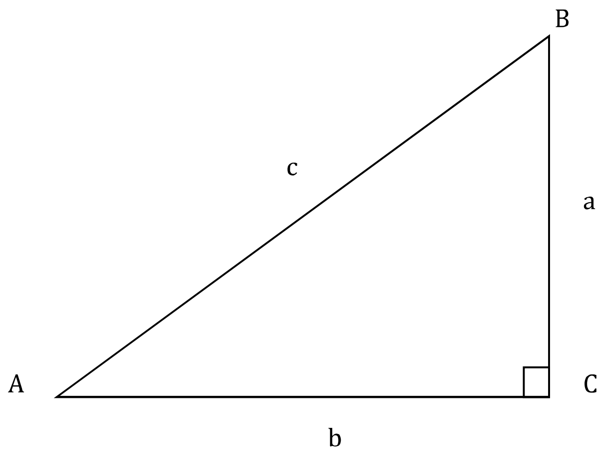
4.- Cuál expresión representa a la tangente del ángulo A en el siguiente triángulo.

a) $\frac{a}{b}$

b) $\frac{b}{a}$

c) $\frac{a}{bc}$

d) $\frac{b}{c}$



5.- Encontrar los valores de x e y que den solución al siguiente sistema de ecuaciones lineales 2 x 2 por el método de:

a) Igualación

b) Sustitución

c) Determinantes (*Regla de Cramer*)

$$4x - 2y = 1$$
$$2x - y = -3$$

Método igualación:

Método sustitución:

Método determinantes:

8. LA LÍNEA RECTA

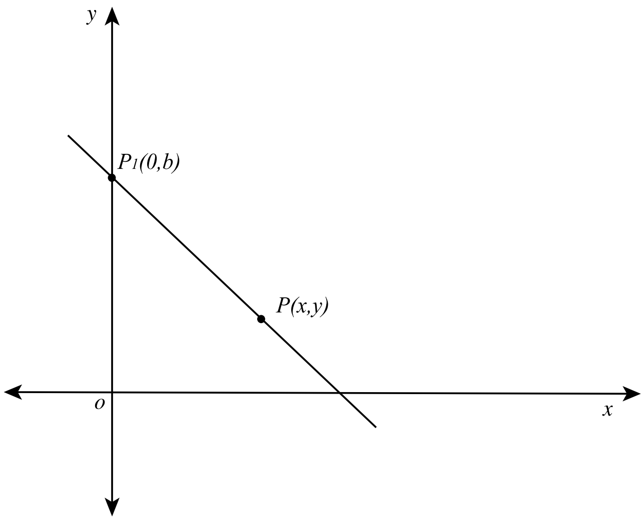
ACTIVIDAD 1.

Individual

Realiza una revisión documental de los conceptos básicos de la línea recta presentados a continuación:

8.1 Introducción la línea recta

Desde el punto de vista analítico, la ecuación de una recta y su gráfica sirven para modelar situaciones de variada naturaleza, donde la tasa de crecimiento o decrecimiento es constante como: pagos de impuestos, alargamiento de materiales, costos de productos, interés simple de un capital, ingresos económicos, conversión de escalas de temperatura, etc.



El uso de estos modelos lineales en la vida es muy extenso. Es importante por esta razón, conocer las diversas definiciones de la línea recta, entre ellas se encuentran:

Geométricamente	Es una ecuación de primer grado con dos variables.
Analíticamente	Se define como la distancia más corta entre dos puntos.
Gráficamente	Es el lugar geométrico de la sucesión de puntos, tales que, tomados dos puntos diferentes cualesquiera **P1** **(X_1, Y_1)** y **P_2 (X_2, Y_2)** del lugar geométrico, el valor de la pendiente (**m**) es siempre constante.

CARACTERÍSTICAS DE LA RECTA

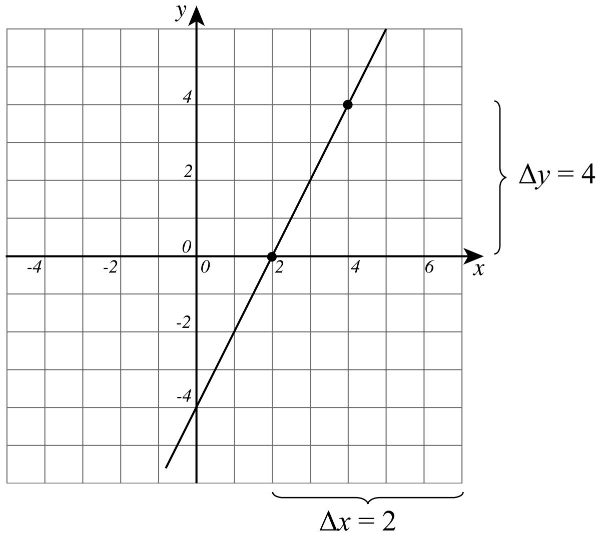
- ✓ La recta se prolonga al infinito en ambos sentidos.
- ✓ La distancia más corta entre dos puntos está en una línea recta (*geometría euclidiana*).

8.2 Retomando la pendiente e inclinación de una recta

La pendiente (*m*) de una recta "L" se define como la razón que existe en la variación de ordenadas (*eje y*) entre la variación de abscisas (*eje x*).

La siguiente figura muestra la gráfica de la ecuación lineal *y = 2x -4*, en ella se puede observar que el valor de y aumenta en cuatro unidades cada vez que el valor de x aumenta dos unidades, la razón de cambio de y entre el cambio correspondiente de *x* es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$$



A esta razón se le llama **pendiente de la recta** y se define como sigue:

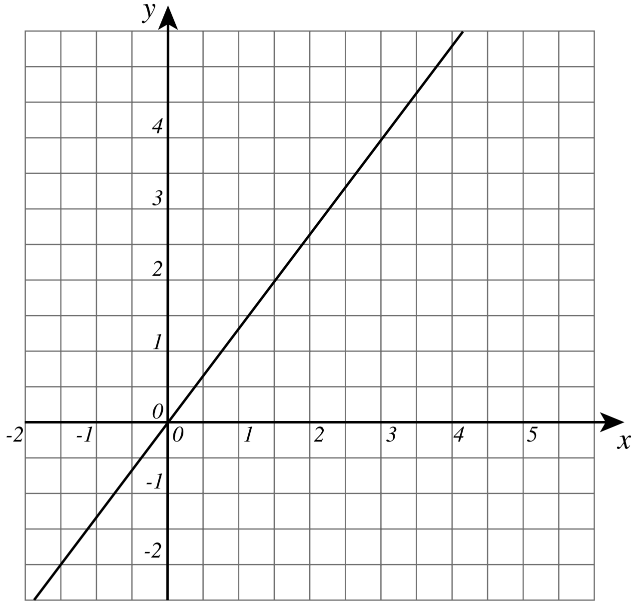
Si dos puntos P_1 (X_1, Y_1) y P_2 (X_2, Y_2) están en una recta "L", la pendiente m de la recta, se define como:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \qquad x_2 \neq x_1$$

También se denomina **pendiente de una recta** a la tangente de un ángulo de inclinación.

$$m = \tan \emptyset$$

La pendiente de una recta no vertical es un número que mide que tan inclinada esta la recta y hacia donde esta inclinada.



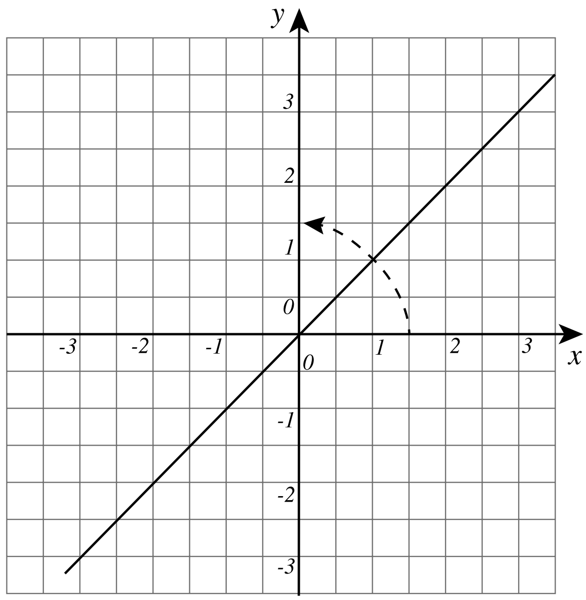
$$m = \frac{4}{3}$$

La recta de la **figura** por cada 3 unidades que avanza hacia la derecha, sube 4 unidades, decimos que la **pendiente de la recta** es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{3}$$

Si la **pendiente de la recta** es:
Positiva; la recta se eleva de izquierda a derecha y la m > 0 0° < ø <90°

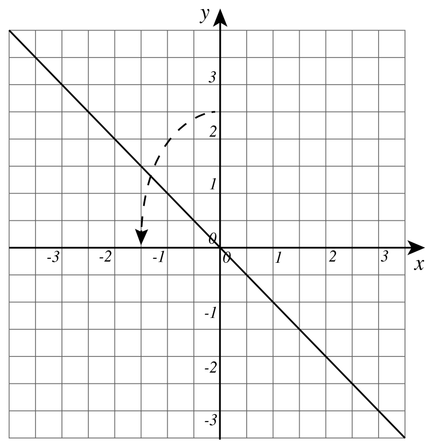
$0^\circ < ø < 90^\circ$



$m = +$

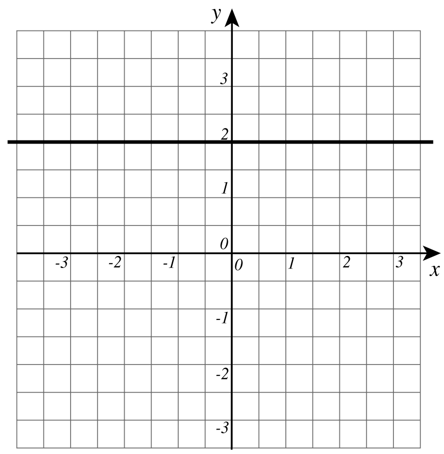
Si la **pendiente de la recta** es:
Negativa; la recta se eleva de izquierda a derecha y la $m < 0$ $90° < ø < 180°$

$90° < \emptyset < 180°$



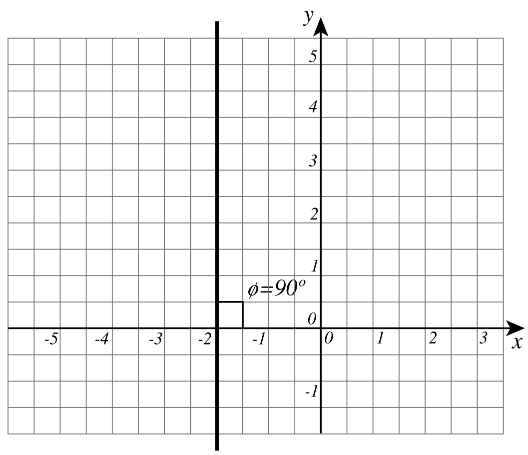
$m = -$

Si la **pendiente de la recta** es:
Cero; la recta es horizontal y la $m = 0$ $ø = 0°$



$m = 0$

Si la **pendiente de la recta** es:
Indefinida; la recta es vertical y la $m = \infty$ $ø = 90°$



$m = \infty$

Recuerda que:

- ✓ La pendiente es positiva cuando la recta esta inclinada hacia la derecha.
- ✓ La pendiente es cero cuando la recta es horizontal.
- ✓ La pendiente es negativa cuando la recta esta inclinada hacia la izquierda.
- ✓ Conforme el valor absoluto de la pendiente es mayor, la recta está más inclinada.
- ✓ Una recta vertical no tiene pendiente.

Valor del ángulo de inclinación.

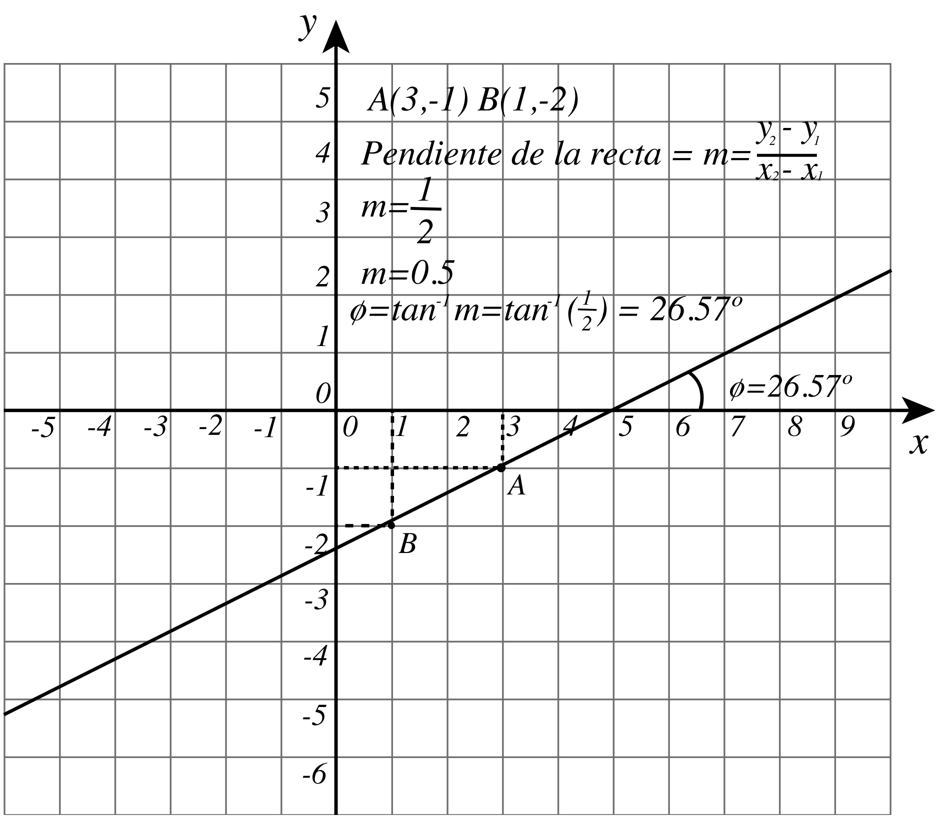
A partir de la ecuación.

$$m = \tan \emptyset$$

Despejando para el ángulo de inclinación de una recta, se tiene:

$$\emptyset = tan^{-1}\, m$$

Como se muestra en la siguiente **figura** el ángulo de inclinación entre dos puntos es:



Trabajo Colaborativo

Revisa los procedimientos para obtener la pendiente de una recta.

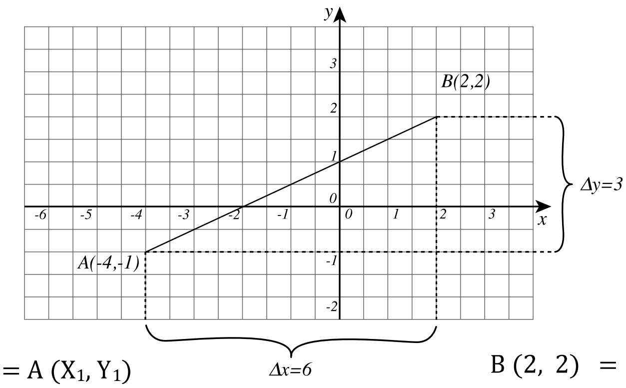
EJEMPLO

Pendiente positiva.

La siguiente **gráfica** muestra el lugar geométrico de los pares ordenados:
A (-4,-1) y B (2,2).

Encuentra la pendiente de la recta determinada por dichos pares de puntos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



A (-4, -1) = A (X_1, Y_1) B (2, 2) = B (X_2, Y_2)

por lo tanto:

simplificando:

X_1	-4
Y_1	-1
X_2	2
Y_2	2

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(2-(-1))}{(2-(-4))} = \frac{(2+1)}{(2+4)} = \frac{3}{6} \qquad m = \frac{1}{2}$$

Nota: La pendiente es positiva ya que la gráfica es ascendente, (de derecha a izquierda).

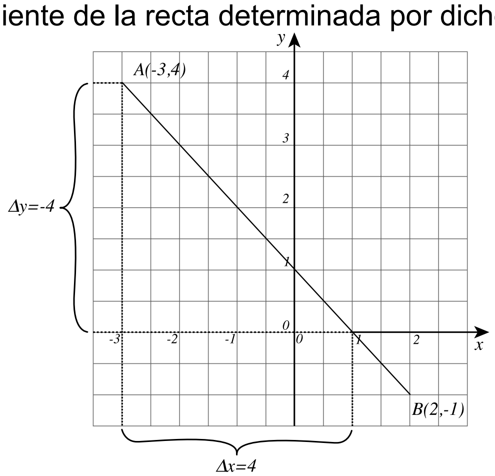
Enlance a sitios WEB, videos, o blogs para reforzar el tema.

EJEMPLO

Pendiente negativa.

La siguiente **gráfica** muestra el lugar geométrico de los pares ordenados:
A (-3,4) y B (2, -1).

Encuentra la pendiente de la recta determinada por dichos pares de puntos:



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5}{5} = -1$$

A (–3, 4) = A (X_1, Y_1) B (2, -1) = B (X_2, Y_2)

por lo tanto:

simplificando:

X_1	-3
Y_1	4
X_2	2
Y_2	-1

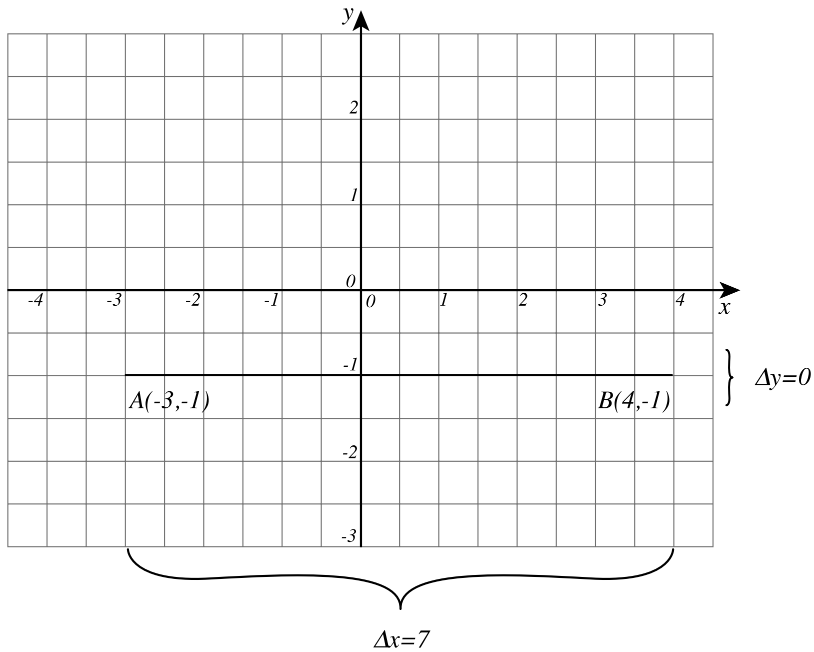
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(-1-4)}{(2-(-3))} = \frac{(-5)}{(2+3)} = \frac{-5}{5} \qquad m = -1$$

Nota: La pendiente es negativa ya que la gráfica es descendente, (de izquierda a derecha).

Pendiente igual a cero.

La siguiente gráfica muestra el lugar geométrico de los pares ordenados:
A (-3,-1) y B (4, -1).

Encuentra la pendiente de la recta determinada por dichos pares de puntos:



por lo tanto:

por lo tanto:

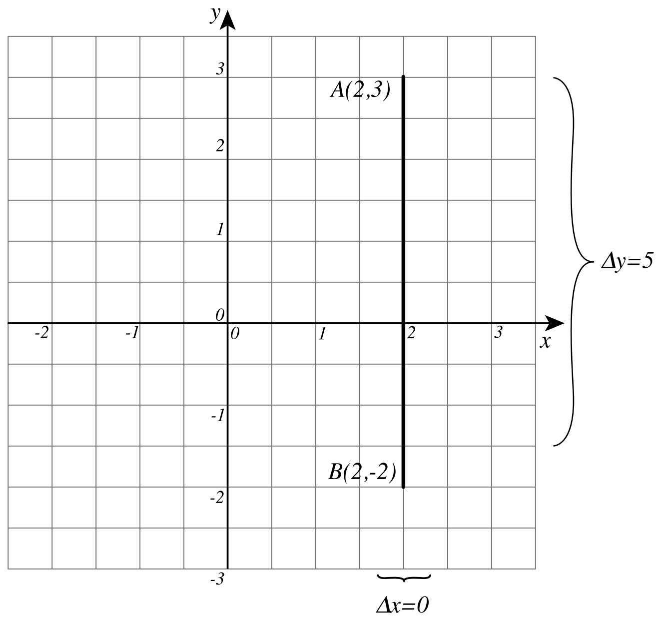
X_1	-3
Y_1	-1
X_2	4
Y_2	-1

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(-1-(-1))}{(4-(-3))} = \frac{(-1+1)}{(4+3)} = \frac{0}{7} \qquad m = 0$$

Nota: La pendiente es 0 lo que indica que la recta no tiene ángulo de inclinación.

La siguiente **gráfica** muestra el lugar geométrico de los pares ordenados:
A (2, 3) y B (2, -2).

Encuentra la pendiente de la recta determinada por dichos pares de puntos:



A (2, 3) = A (X_1, Y_1) B (2, -2) = B (X_2, Y_2)

por lo tanto:

por lo tanto:

X_1	2
Y_1	3
X_2	2
Y_2	-2

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(-2-3)}{(2-2)} = \frac{(-5)}{(0)} = \frac{-5}{0} \qquad m = \infty$$

Nota: La pendiente es indefinida o infinita ∞ lo que indica que la recta es perpendicular al eje de las *"y"*.

EJEMPLO

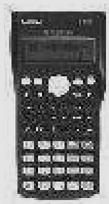
Cálculo de la Pendiente cuando se conoce el ángulo.

Calcula la pendiente, dado el ángulo de inclinación e interpreta su representación **gráfica.**

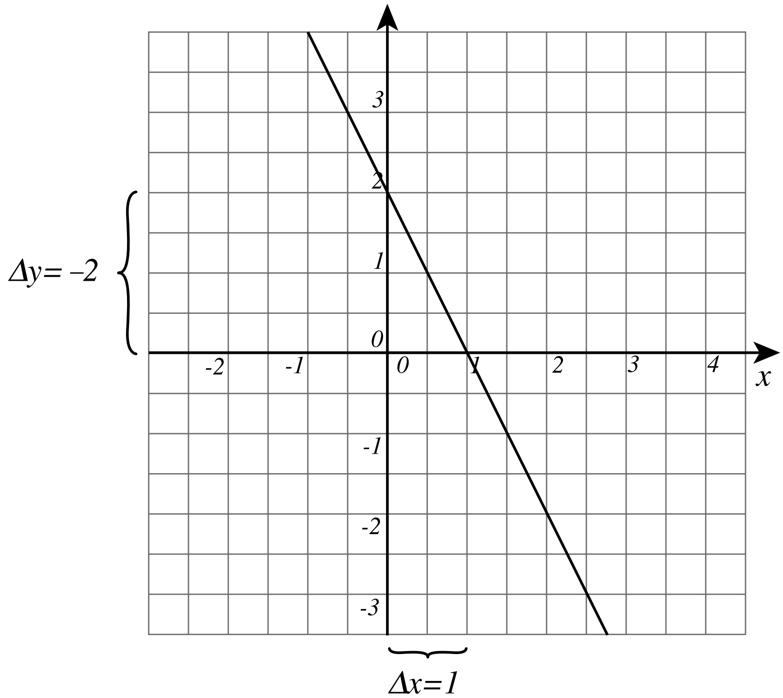
$$\emptyset = 116°$$

Formula: $m = \tan \emptyset$

Desarrollo: $m = \tan \emptyset = \tan(116°) = -2.05$



Aproximadamente: $m = -2$



Interpretación gráfica:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{1} = -2$$

Como la pendiente es negativa esto significa que la recta es descendente (va de izquierda a derecha), además como la pendiente tiene un valor de 2, significa que por cada 2 unidades de cambio en el eje "y" tendrá una unidad de cambio en el eje "x".

EJEMPLO

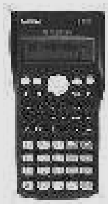
Cálculo de la Pendiente cuando se conoce el ángulo.t

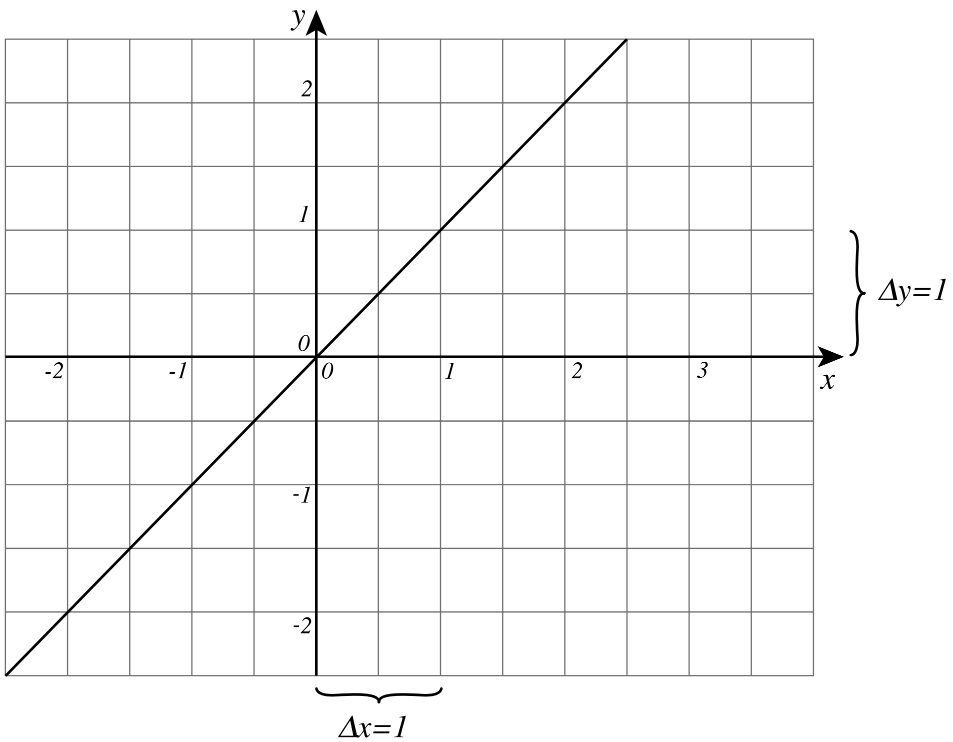
Calcula la pendiente, dado el ángulo de inclinación e interpreta su representación **gráfica.**

$$\emptyset = 45°$$

Formula: $m = \tan \emptyset$

Desarrollo: $m = \tan \emptyset = \tan(45°) = 1$





Interpretación gráfica: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{1} = 1$

Como la pendiente es positiva esto significa que la recta es ascendente (va de derecha a izquierda), además como la pendiente tiene un valor de 1, significa que por cada unidad de cambio en el eje "*y*" tendrá una unidad de cambio en el eje *"x"*.

EJEMPLO Cálculo del ángulo cuando se conoce la pendiente.

Dada la pendiente, encuentra el ángulo de inclinación e interpreta su representación **gráfica.**

$$m = -3$$

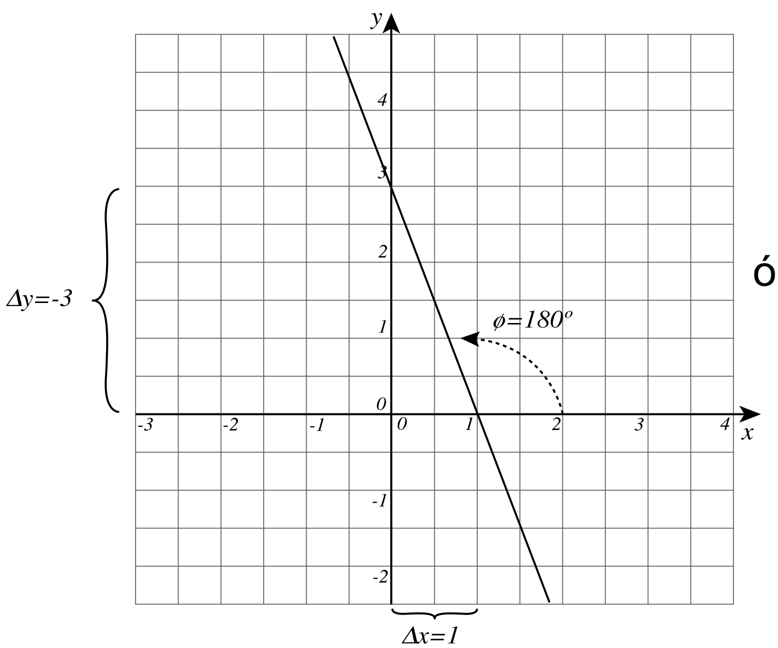
Formula: $m = \tan \emptyset$

Desarrollo: $\emptyset = tan^{-1}\ m = tan^{-1}\ (-3) = -71.56$

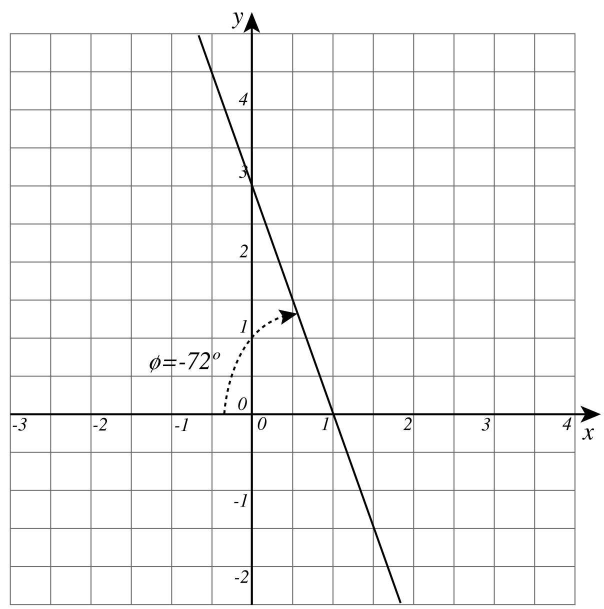
Aproximadamente: $m = -72^{\circ}$

Como la pendiente es negativa esto significa que debemos realizar la siguiente operación:

180° - 72° = 108°



ó



Interpretación gráfica: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-3}{1} = -3$

Como la pendiente es negativa esto significa que la recta es descendente (va de izquierda a derecha), además como la pendiente tiene un valor de 3, significa que por cada 3 unidades de cambio en el eje “y” tendrá una unidad de cambio en el eje “x”.

EJEMPLO

Cálculo del ángulo cuando se conoce la pendiente.

Dada la pendiente, encuentra el ángulo de inclinación e interpreta su representación **gráfica.**

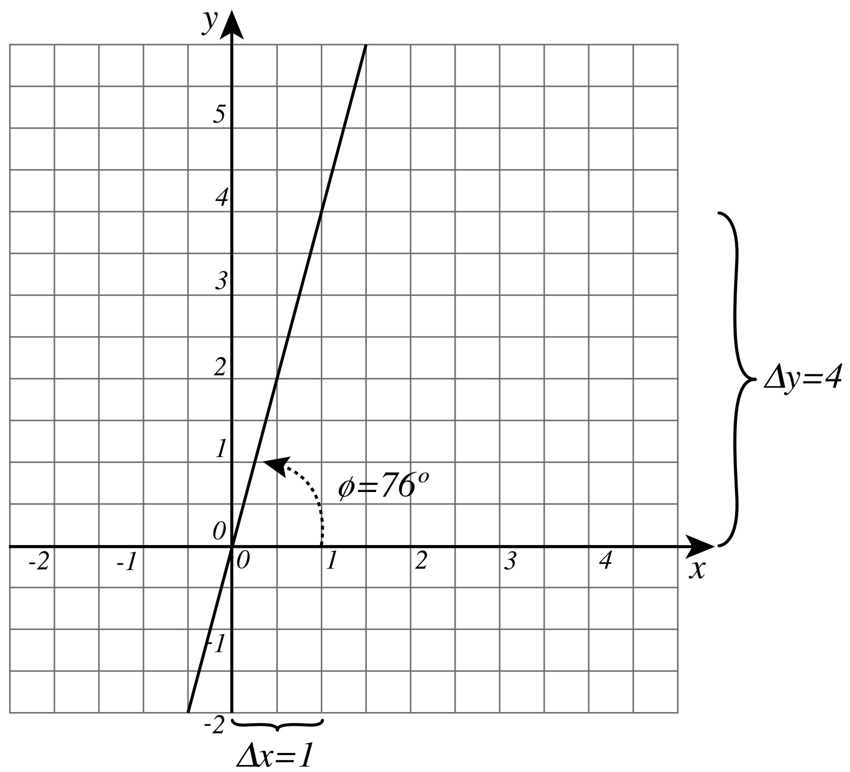
$m = 4$

Formula: $m = \tan \emptyset$

Desarrollo: $\emptyset = tan^{-1}\ m = tan^{-1}\ (4) = 75.96$

Aproximadamente:

$\emptyset = 76°$



Interpretación gráfica: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4}{1} = 4$

Como la pendiente es positiva esto significa que la recta es ascendente (va de derecha a izquierda), además como la pendiente tiene un valor de 4, significa que por cada 4 unidades de cambio en el eje "y" tendrá una unidad de cambio en el eje "x".

Enlance a sitios WEB, videos, o blogs para reforzar el tema.

EVALUACIÓN FORMATIVA

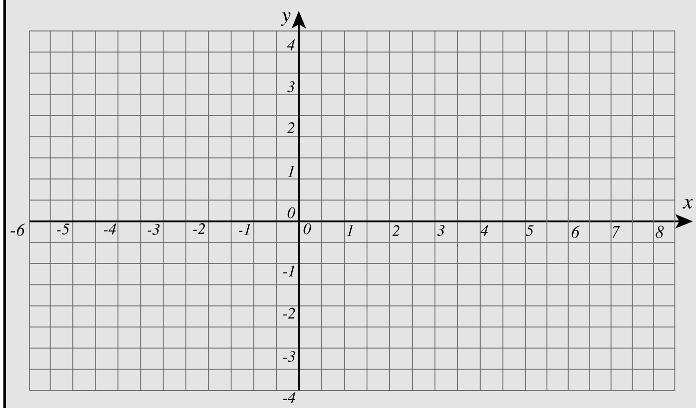
Trabajo Colaborativo

Resuelve los siguientes ejercicios mediante el procedimiento propuesto en los ejemplos anteriores.

1.- Encuentra y grafica la pendiente de la recta que pasa por los siguientes pares de puntos:

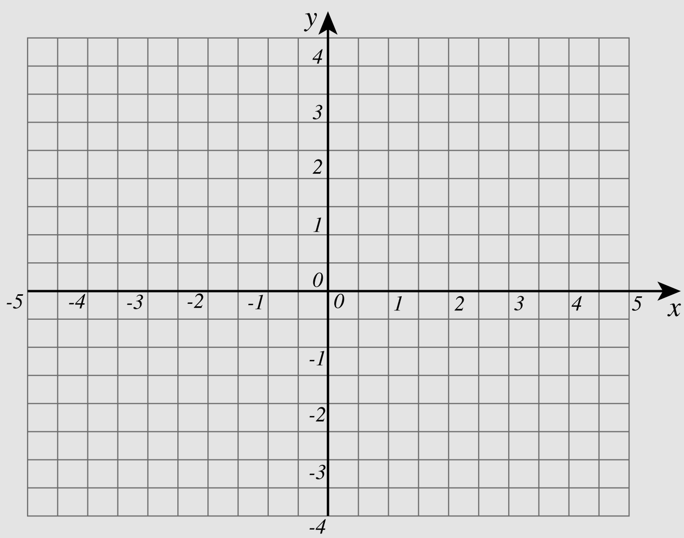
a) $A(6, 4)$, $B(2, -3)$

Procedimiento:



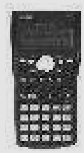
b) $A(-3, 0)$, $B(1, 2)$

Procedimiento:

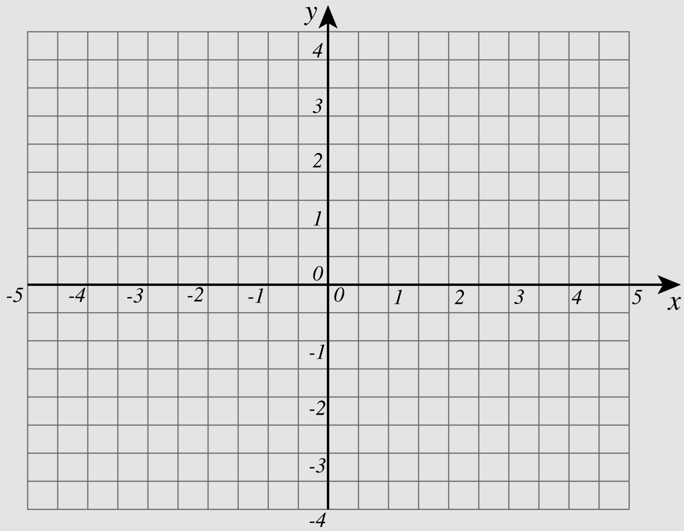


2.- Dado el ángulo de inclinación de una recta encuentra su pendiente y su gráfica.

a) $\emptyset = 120°$

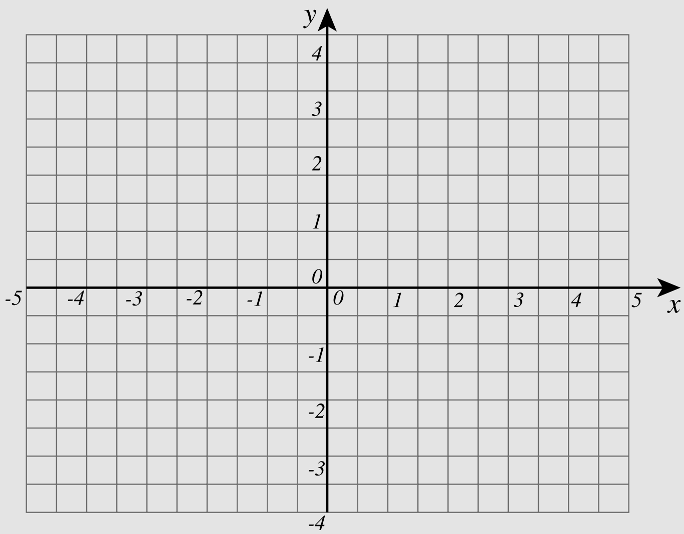


Procedimiento:



b) $\emptyset = 96.35°$

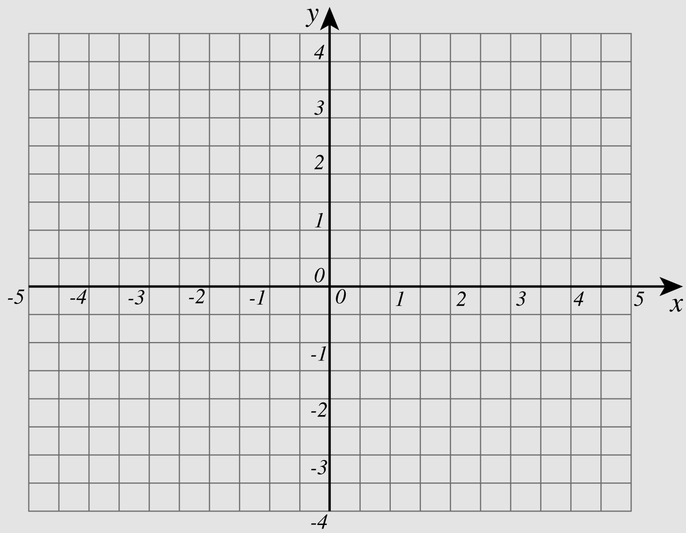
Procedimiento:



3.- Dada la pendiente de una recta encuentra su ángulo y su gráfica.

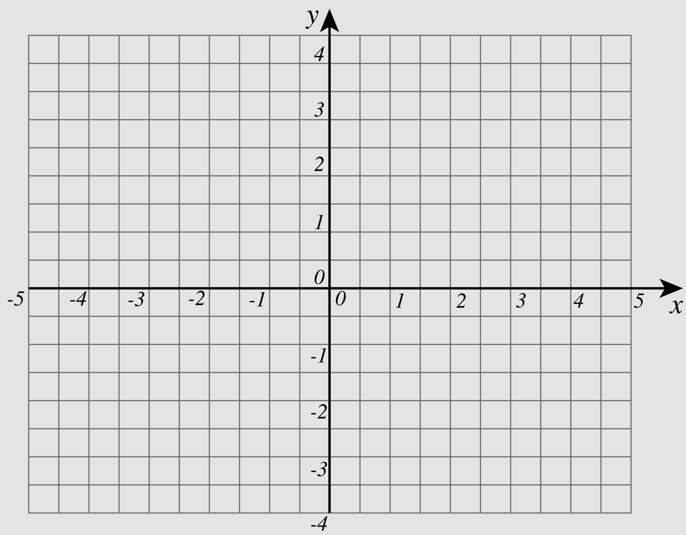
a) $m = 3$

Procedimiento:



b) $m = -5/4$

Procedimiento:



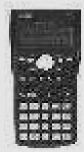
Nota: Comparte los ejercicios anteriores con otro equipo para realizar una coevaluación, utiliza el instrumento de evaluación que se encuentra como anexo al final de la segunda unidad, para registrar el logro de los aprendizajes.

Individual

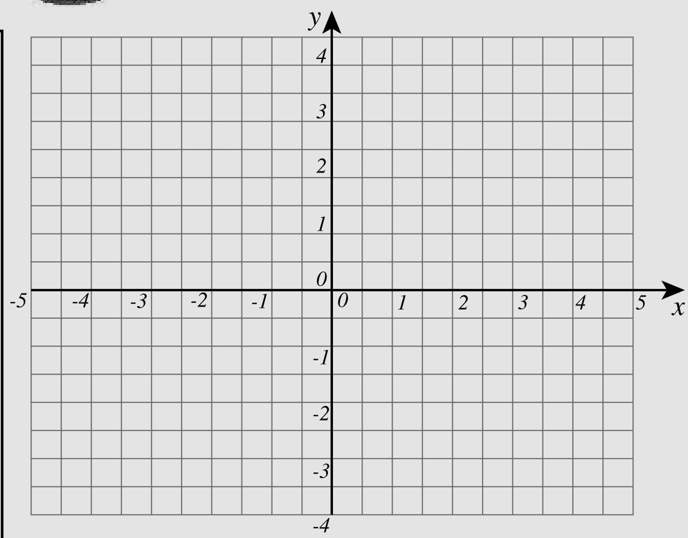
Trabajo individual para ser evaluado por tu profesor.

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios mediante el procedimiento propuesto en los ejemplos anteriores además grafica los pares ordenadas en el graficador Geogebra, Graphmatica o en algún otro graficador propuesto por tu profesor.

a) $A(-3, 3)$, $B(3, -4)$

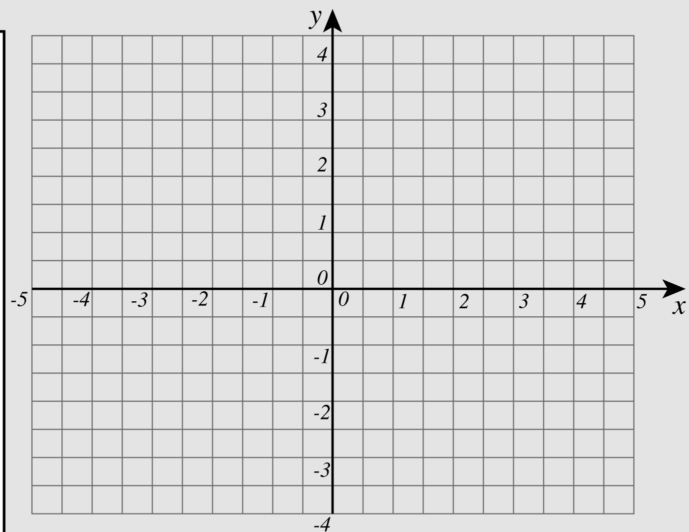


Procedimiento:



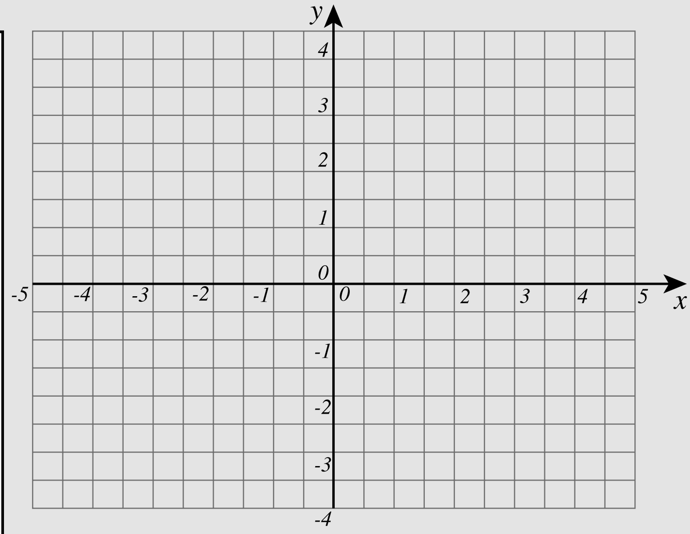
b) $A(-3, 2)$, $B(2, 1)$

Procedimiento:



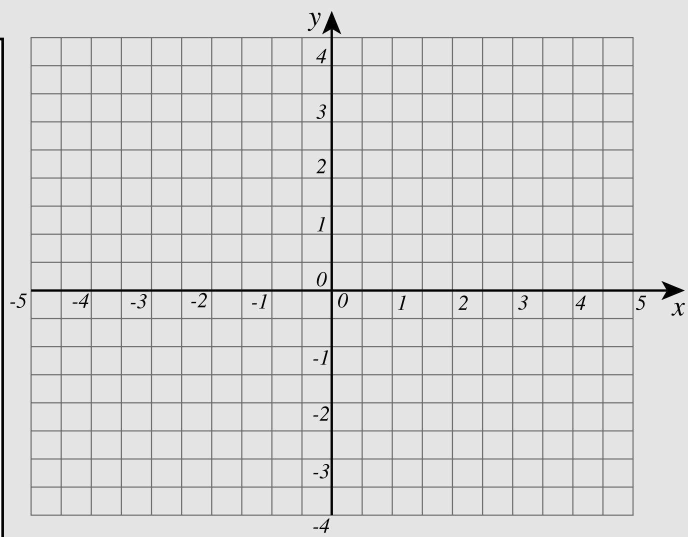
c) $\emptyset = 135°$

Procedimiento:



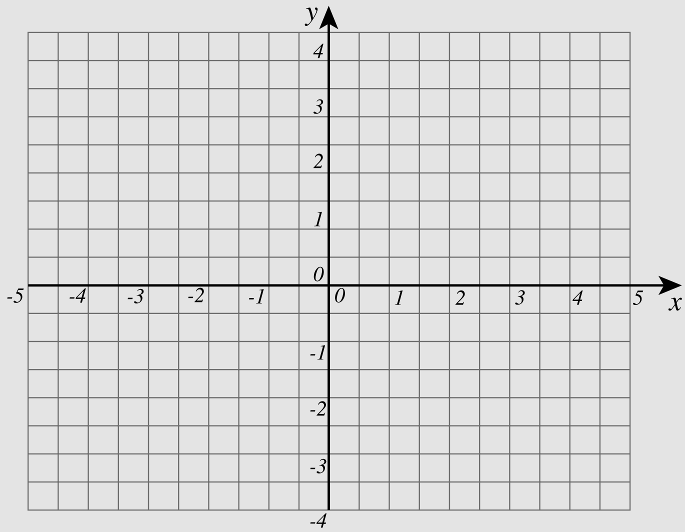
d) $\emptyset = 60.43°$

Procedimiento:



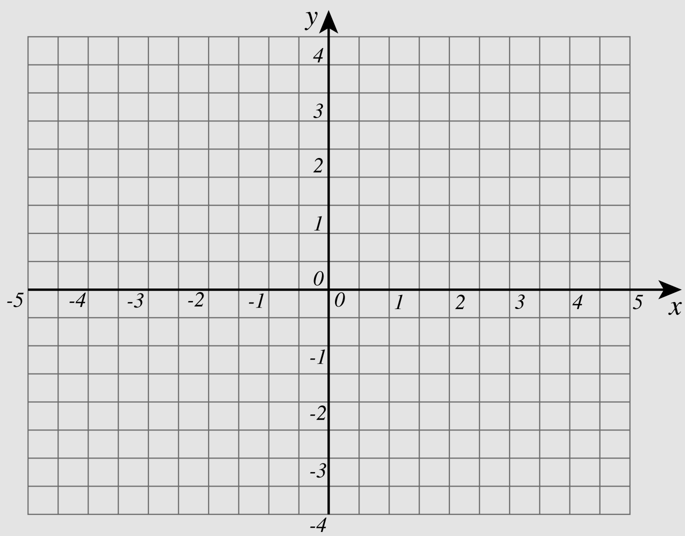
e) $m = 7/3$

Procedimiento:



f) $m = 1/2$

Procedimiento:



ACTIVIDAD 2.

Individual

Realiza una revisión documental de los conceptos básicos de las formas de la ecuación de la recta presentados a continuación:

8.3 La ecuación de la recta y sus representaciones

La ecuación de la línea recta se puede presentar de distintas maneras, destacando en cada caso alguna característica del lugar geométrico.

Pendiente - ordenada	Punto- pendiente	General	Simétrica
$y=mx+b$	$y - y_1 = m(x - x_1)$	$Ax+By+C=0$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
m es la pendiente y b es la ordenada.	(x_1, y_1) son las coordenadas de cualquier punto de la recta dada y m es la pendiente.	Los coeficientes A,B y C son números reales cualesquiera, con la condición de que A ó B deben ser diferente de cero y C puede ser cualquier número o cero.	$a = a$ la abscisa al origen y $b = a$ la ordenada al origen.

Trabajo Colaborativo

Revisa los procedimientos para obtener la ecuación de una recta.

EJEMPLO

1) Encuentra la ecuación de la recta que paso por los puntos **A(-2, 3)** y **B(5, -2)** en las formas:

a) Punto-pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
b) Pendiente-ordenada	$y = mx + b$
c) General	$Ax + By + C = 0$
d) Simétrica	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Solución:
Primero hay que encontrar la pendiente:

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

para lo cual hay que asignarle las coordenadas correspondientes a los puntos dados:

A (-2, 3) = A (X_1, Y_1) y B (5, -2) = B (X_2, Y_2)

por lo tanto:

X_1	-2
Y_1	3
X_2	5
Y_2	-2

sustituyendo en la ecuación de la pendiente tenemos:

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(-2 - 3)}{(5 - (-2))} = \frac{(-5)}{(5 + 2)} = \frac{-5}{7}$$

a) Para encontrar la ecuación de la recta en su forma **Punto-pendiente.**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Paso 1: Se tiene que la pendiente es:	$m = \frac{-5}{7}$
Paso 2: Se toma cualquier punto de los anteriormente dados por ejemplo:	A (-2, 3) = A (X_1, Y_1)
Paso 3: Sustituyendo los valores del punto A(-2, 3) en la ecuación y realizando las operaciones con los signos se tiene que:	$y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 3 = \frac{5}{-7}(x - (-2))$ $y - 3 = \frac{-5}{7}(x + 2)$
Paso 4: De lo cual se tiene que la ecuación de la recta en su forma punto – pendiente es:	$y - 3 = \frac{-5}{7}x + 2$

b) Para encontrar la ecuación de la recta en su forma **Pendiente-ordenada**

$$y = mx + b$$

se toma la ecuación de la recta en su forma punto – pendiente $y - 3 = \frac{-5}{7}(x + 2)$ para despejar la variable y:

Paso 1: Para despejar la variable y, se debe multiplicar ambos lados por 7.

$$y - 3 = \frac{-5}{7}(x + 2)$$

$$7(y - 3) = (7)\frac{-5}{7}(x + 2)$$

Paso 2: Se realizan las operaciones correspondientes de la multiplicación.

$$7y - 21 = -5(x + 2)$$

$$7y - 21 = -5x - 10$$

Paso 3: Se le suman a ambos lados +21 y eliminando -21 +21 del lado izquierdo y realizando la resta -10 +21 de lado derecho se tiene que:

$$7y - 21 + 21 = -5x - 10 + 21$$

$$7y - \cancel{21} + \cancel{21} = -5x - 10 + 21$$

$$7y = -5x + 11$$

Paso 4: Se divide entre 7 a ambos lados en todos sus términos.

$$\frac{7}{7}y = \frac{-5}{7}x + \frac{11}{7}$$

Paso 5: Se realizan las operaciones correspondientes para obtener la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada:

$$y = \frac{-5}{7}x + \frac{11}{7}$$

En donde la pendiente es $m = \frac{-5}{7}$ y la ordenada es $b = \frac{11}{7}$.

c) Para encontrar la ecuación de la recta en su forma **General.**

$$Ax + By + C = 0$$

se utiliza la ecuación de la recta en su forma punto – ordenada $y = \frac{-5}{7}x + \frac{11}{7}$ para igualar a 0:

Paso 1: Se le suman a ambos lados $+\frac{5}{7}x$.

$$y = \frac{-5}{7}x + \frac{11}{7}$$

$$y + \frac{5}{7}x = \frac{-5}{7}x + \frac{5}{7}x + \frac{11}{7}$$

Paso 2: Se realizan las operaciones correspondientes en el lado derecho eliminando $-\frac{5}{7}x + \frac{5}{7}x$.

$$y + \frac{5}{7}x = \cancel{\frac{-5}{7}}x + \cancel{\frac{5}{7}}x + \frac{11}{7}$$

Paso 3: Se le restan a ambos lados $\frac{11}{7}$.

$$y + \frac{5}{7}x = \frac{11}{7}$$

$$y + \frac{5}{7}x - \frac{11}{7} = \frac{11}{7} - \frac{11}{7}$$

Paso 4: Se realizan las operaciones correspondientes en ambos lados eliminando $\frac{11}{7} - \frac{11}{7}$ en el lado derecho.

$$y + \frac{5}{7}x - \frac{11}{7} = 0$$

Paso 5: Ordenando los términos para t ener la ecuación de la recta en su forma general. *Ax+By+C=0*

$$\frac{5}{7}x + y - \frac{11}{7} = 0$$

Paso 6: Se multiplica ambos lados por 7 y realizando las operaciones correspondientes.

$$7\left[\frac{5}{7}x + y - \frac{11}{7}\right] = 7[\ 0\ ]$$

$$\frac{35}{7}x + 7y - \frac{77}{7} = 0$$

Paso 7: Simplificando los coeficientes de los términos se tiene que $\frac{35}{7} = 5$ y $\frac{77}{7} = 11$ por lo que la ecuación de la recta en su forma general es:

$$Ax + By + C = 0$$

$$5x + 7y - 11 = 0$$

d) Para encontrar la ecuación de la recta en su forma **simétrica.**

$$\frac{x}{\mathrm{a}} + \frac{y}{\mathrm{b}} = 1$$

se utiliza la ecuación de la recta en su forma general $5x + 7y - 11 = 0$ para igualar a 1:

Paso 1: Se le suman a ambos lados 11.

$$5x + 7y - 11 = 0$$
$$5x + 7y - 11 + 11 = 0 + 11$$

Paso 2: Se realizan las operaciones correspondientes en cada lado en el lado izquierdo eliminando $-11 + 11$.

$$5x + 7y - \cancel{11} + \cancel{11} = 11$$
$$5x + 7y = 11$$

Paso 3: Se le restan a 11 ambos lados.

$$5x + 7y = 11$$
$$\frac{5x+7y}{11} = \frac{11}{11}$$

Paso 4: Se realizan las operaciones correspondientes en ambos lados.

$$\frac{5x}{11} + \frac{7y}{11} = 1$$

Paso 5: Se realiza la simplificación de los coeficientes de la x e y para hacerlo 1.

$$\frac{x}{\frac{11}{5}} + \frac{y}{\frac{11}{7}} = 1$$

Paso 6: Como se puede observar ya se tiene la ecuación en su forma simétrica, siendo la abscisa (a) y la ordenada (b):

$$\mathrm{a} = \frac{11}{5} \qquad \mathrm{b} = \frac{11}{7}$$

EJEMPLO

2) Encuentra la ecuación de la recta que paso por los puntos **A(-1, -1) y B(2, 5)** en las formas:

a) Punto-pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
b) Pendiente-ordenada	$y = mx + b$
c) General	$Ax + By + C = 0$
d) Simétrica	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Solución:
Primero hay que encontrar la pendiente:

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

para lo cual hay que asignarle las coordenadas correspondientes a los puntos dados:

$$A(-1, -1) = A(X_1, Y_1) \quad \text{y} \quad B(2, 5) = B(X_2, Y_2)$$

por lo tanto:

X_1	-1
Y_1	-1
X_2	2
Y_2	5

sustituyendo en la ecuación de la pendiente tenemos:

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(5 - (-1))}{(2 - (-1))} = \frac{(5 + 1)}{(2 + 1)} = \frac{6}{3} = 2$$

a) Para encontrar la ecuación de la recta en su forma **Punto-pendiente.**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Paso 1: Se tiene que la pendiente es: $m = 2$

Paso 2: Se toma cualquier punto de los anteriormente dados por ejemplo: $A(-1, -1) = A(X_1, Y_1)$

Paso 3: Sustituyendo los valores del punto A(-1, -1) en la ecuación y realizando las operaciones con los signos se tiene que:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-1) = 2(x - (-1))$$
$$y + 1 = 2(x + 1)$$

Paso 4: De lo cual se tiene que la ecuación de la recta en su forma punto – pendiente es:

$$y + 1 = 2(x + 1)$$

b) Para encontrar la ecuación de la recta en su forma **Pendiente-ordenada.** $y = mx + b$ se toma la ecuación de la recta en su forma punto – pendiente : $y+1=2(x+1)$ para despejar la variable y:	
Paso 1: Para despejar la variable y, se debe realizar la operación de multiplicación en el lado derecho.	$y + 1 = 2(x + 1)$ $y + 1 = 2x + 2$
Paso 2: Se le restan a ambos lados 2 y eliminando +2 - 2 del lado derecho y realizando la resta +1 -2 de lado izquierdo se tiene que:	$y + 1 - 2 = 2x + 2 - 2$ $y + 1 - 2 = 2x \cancel{+2} \cancel{-2}$ $y - 1 = 2x$
Paso 3: Se le suman a ambos lados 1 y eliminando -1 +1 del lado izquierdo se tiene que:	$y \cancel{-1} \cancel{+1} = 2x + 1$ $y = 2x + 1$
Paso 4: De lo anterior se obtiene la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada:	$y = 2x + 1$
En donde la pendiente es $m = 2$ y la ordenada es $b = 1$.	

c) Para encontrar la ecuación de la recta en su forma **General** $Ax+By+C=0$ se utiliza la ecuación de la recta en su forma punto – ordenada $y = 2x+1$ para igualar a 0:	
Paso 1: Se le resta $2x$ a ambos lados se tiene que:t	$y = 2x + 1$ $y - 2x = 2x - 2x + 1$
Paso 2: Se realizan las operaciones correspondientes en el lado derecho eliminando $2x$-$2x$	$y - 2x = \cancel{2x} - \cancel{2x} + 1$
Paso 3: Se tiene que:	$y - 2x = 1$
Paso 4: Se le resta 1 a ambos lados se tiene que:	$y - 2x - 1 = 1 - 1$ $y - 2x - 1 = 0$
Paso 5: Ordenando los términos para tener la ecuación de la recta en su forma general. $Ax+By+C=0$	$-2x + y - 1 = 0$
Paso 6: Se multiplica ambos lados por -1 y realizando las operaciones correspondientes.	$-1[-2x + y - 1] = -1[0]$ $2x - y + 1 = 0$
Paso 7: Por lo que la ecuación de la recta en su forma general es:	$Ax + By + C = 0$ $2x - y + 1 = 0$

d) Para encontrar la ecuación de la recta en su forma **simétrica.**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

se utiliza la ecuación de la recta en su forma general para igualar a 1: $2x - y + 1 = 0$

Paso 1: Se le resta a ambos lados 1

$$2x - y + 1 = 0$$

$$2x - y + 1 - 1 = 0 - 1$$

Paso 2: Se realizan las operaciones correspondientes en cada lado, en el lado izquierdo se eliminan +1 - 1

$$2x - y \cancel{+1} \cancel{-1} = 0 - 1$$

$$2x - y = -1$$

Paso 3: Se divide entre -1 a ambos lados.

$$2x - y = -1$$

$$\frac{2x - y}{-1} = \frac{-1}{-1}$$

Paso 4: Se realizan las operaciones correspondientes en ambos lados.

$$\frac{2x}{-1} + \frac{y}{-1} = 1$$

Paso 5: Se realiza la simplificación de los coeficientes de la x e y para hacerlo 1.

$$\frac{x}{\frac{-1}{2}} + \frac{y}{-1} = 1$$

Paso 6: Como se puede observar ya se tiene la ecuación en su forma simétrica, Siendo la abscisa (a) y la ordenada (b):

$$a = \frac{-1}{2} \qquad b = -1$$

EVALUACIÓN FORMATIVA

Trabajo Colaborativo

Resuelve los siguientes ejercicios mediante el procedimiento propuesto en los ejemplos anteriores.

EJERCICIO

Encuentra la ecuación de la recta en sus formas:

a) Punto-pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
b) Pendiente-ordenada	$y = mx + b$
c) General	$Ax + By + C = 0$
d) Simétrica	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
de los siguientes puntos:	

1) A(-2, -5) y B(4, 1)

Procedimiento: **a) Punto-pendiente** $y - y_1 = m(x - x_1)$

Procedimiento: **b) Pendiente-ordenada** $y = mx + b$

Procedimiento: **c) General** $Ax + By + C = 0$

Procedimiento:

d) Simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

2) A(4, 7) y B(6, 11)

Procedimiento:

a) Punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$

Procedimiento:

b) Pendiente-ordenada $y = mx + b$

Procedimiento:

c) General $Ax + By + C = 0$

Procedimiento:

d) Simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

EJERCICIO

Escribe la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada dada por la pendiente (m) y con intersección en "y" (b).

1) $m = 3$ y $b = -4$

Procedimiento: **Pendiente-ordenada** $y = mx + b$

2) $m = 7$ y $b = 0$

Procedimiento: **Pendiente-ordenada** $y = mx + b$

EJERCICIO

Encuentra la ecuación de la recta en sus formas:

a) Punto-pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
b) General	$Ax + By + C = 0$
c) Simétrica	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
que pasa por el punto $A(X_1, Y_1)$ y tiene pendiente m :	

1) $A(2, 3)$ y $m = 5$

Procedimiento: **a) Punto-pendiente** $y - y_1 = m(x - x_1)$