Procedimiento: **b) General** $Ax + By + C = 0$

Procedimiento: **c) Simétrica** $\frac{x}{\mathrm{a}} + \frac{y}{\mathrm{b}} = 1$

2) A(-5, 1) y $m = \frac{-4}{3}$

Procedimiento: **a) Punto-pendiente** $y - y_1 = m(x - x_1)$

Procedimiento: **b) General** $Ax + By + C = 0$

Procedimiento: **c) Simétrica** $\frac{x}{\mathrm{a}} + \frac{y}{\mathrm{b}} = 1$

Nota: Comparte los ejercicios anteriores con otro equipo para realizar una coevaluación, utiliza el instrumento de evaluación que se encuentra como anexo al final de la segunda unidad, para registrar el logro de los aprendizajes.

Individual

EJERCICIO

Trabajo individual para ser evaluado por tu profesor.

Resuelve los siguientes ejercicios mediante el procedimiento propuesto en los ejemplos anteriores.

Encuentra la ecuación de la recta en sus formas:

a) Punto-pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
b) Pendiente-ordenada	$y = mx + b$
c) General	$Ax + By + C = 0$
d) Simétrica	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
de los siguientes puntos:	

1) A(1, 1) y B(4, 6)

Procedimiento: **a) Punto-pendiente** $y - y_1 = m(x - x_1)$

Procedimiento: **b) Pendiente-ordenada** $y = mx + b$

Procedimiento: **c) General** $Ax + By + C = 0$

Procedimiento:

d) Simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

2) A(-10,-7) y B(-6,-2)

Procedimiento:

a) Punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$

Procedimiento:

b) Pendiente-ordenada $y = mx + b$

Procedimiento:

c) General $Ax + By + C = 0$

Procedimiento:

d) Simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

EJERCICIO **Escribe la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada dada por la pendiente (m) y con intersección en "y" (b).**

1) m = 3 y b = -4

Procedimiento: **Pendiente-ordenada** $y = mx + b$

2) m = 7 y b = 0

Procedimiento: **Pendiente-ordenada** $y = mx + b$

3) m = -8 y b = 3

Procedimiento: **Pendiente-ordenada** $y = mx + b$

4) m = 1 y b = -8

Procedimiento: **Pendiente-ordenada** $y = mx + b$

EJERCICIO

Encuentra la ecuación de la recta en sus formas:

a) Punto-pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
b) General	$Ax + By + C = 0$
c) Simétrica	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
que pasa por el punto $A(X_1, Y_1)$ y tiene pendiente *m* :	

1) A(4,-3) y m = -2

Procedimiento: **a) Punto-pendiente** $y - y_1 = m(x - x_1)$

Procedimiento: **b) General** $Ax + By + C = 0$

Procedimiento: **c) Simétrica** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

2) A(-6, -3) y $m = \frac{3}{2}$

Procedimiento: **a) Punto-pendiente** $y - y_1 = m(x - x_1)$

Procedimiento: **b) General** $Ax + By + C = 0$

Procedimiento: **c) Simétrica** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

3) $A(-\frac{6}{7}, -\frac{1}{2})$ y $m = \frac{-3}{5}$

Procedimiento: **a) Punto-pendiente** $y - y_1 = m(x - x_1)$

Procedimiento: **b) General** $Ax + By + C = 0$

Procedimiento: **c) Simétrica** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

ACTIVIDAD 3.

Individual

Realiza una revisión documental de los conceptos básicos de comportamiento de dos rectas presentados a continuación:

8.4 Análisis del comportamiento de dos rectas.

Sean las rectas: L_1 *de la ecuación* $y = m_1 + b_1$

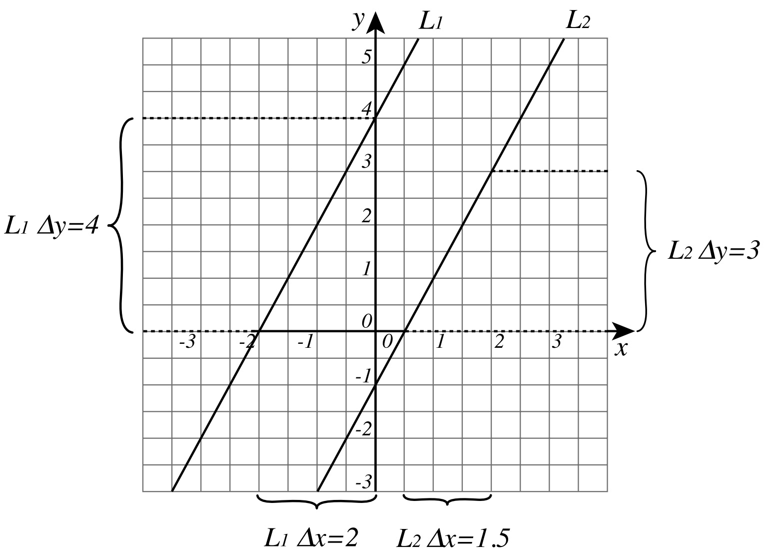
L_2 *de la ecuación* $y = m_2 + b_2$

Entonces las posiciones relativas que se pueden dar entre ambas rectas son las siguientes:

- ✓ **Paralelismo**

Dos rectas son paralelas sí, y sólo sí sus pendientes son iguales.

$$L_1 \parallel L_2 \leftrightarrow m_1 = m_2 \quad \text{y} \quad b_1 \neq b_2$$



$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2 \qquad m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1.5} = 2$$

$$b_1 = 4 \qquad b_2 = -1$$

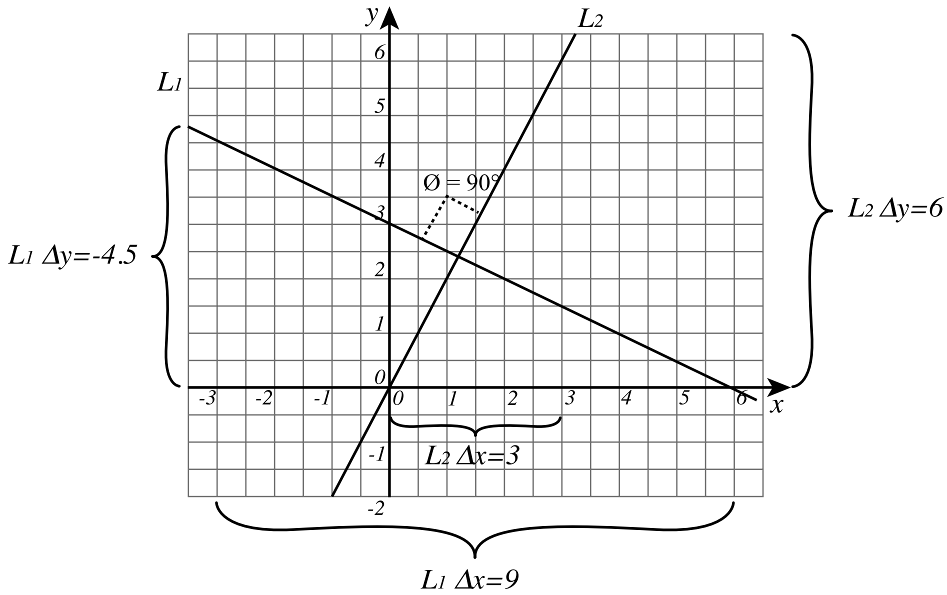
Por lo que se cumple $L_1 \parallel L_2 \leftrightarrow m_1 = m_2$

$$b_1 \neq b_2$$

✓ **Perpendicularidad:**

Dos rectas son perpendiculares entre sí, y sólo sí sus pendientes son inversas y de signos contrarios.

$$L_1 \perp L_2 \leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad y \quad b_1 \neq b_2$$



$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4.5}{9} = -0.5$$

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{3} = 2$$

$$L_1 \perp L_2 \leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

$$b_1 = 3 \qquad b_2 = 0$$

$$-0.5 = -\frac{1}{2}$$

$$b_1 \neq b_2$$

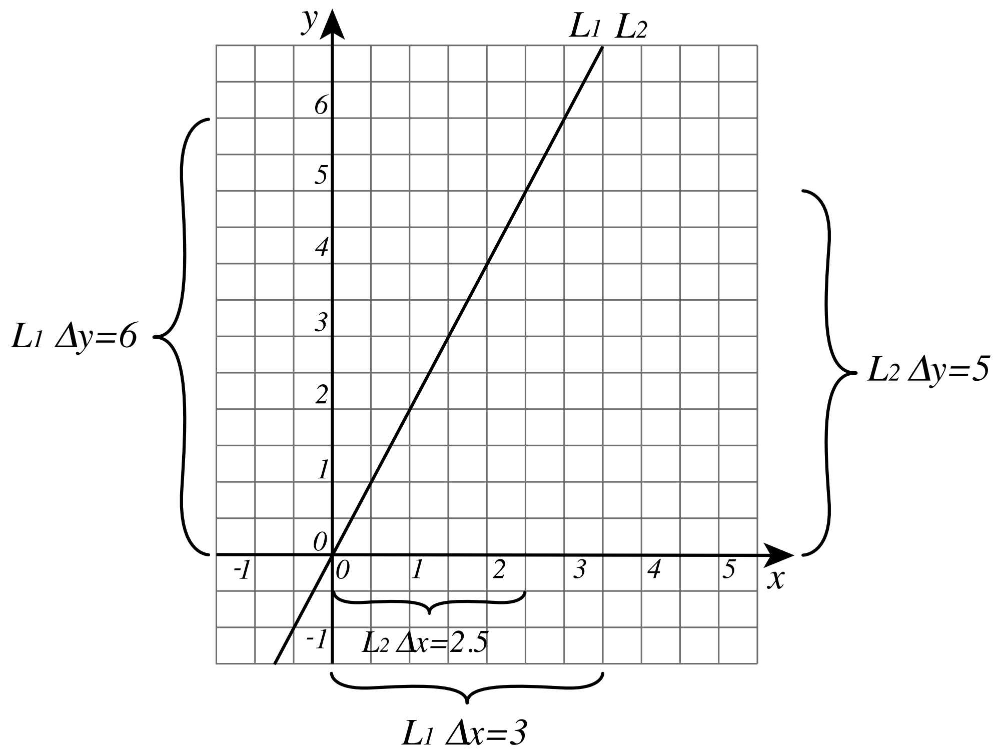
$$-0.5 = -0.5$$

Por lo que se cumple $L_1 \perp L_2 \leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

✓ **Coincidencia:**

Dos rectas coinciden entre sí y sólo sí sus pendientes son iguales.

$$L_1 = L_2 \leftrightarrow m_1 = m_2 \quad y \quad b_1 = b_2$$



$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{3} = 2 \qquad m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{2.5} = 2$$

$$b_1 = 0 \qquad b_2 = 0$$

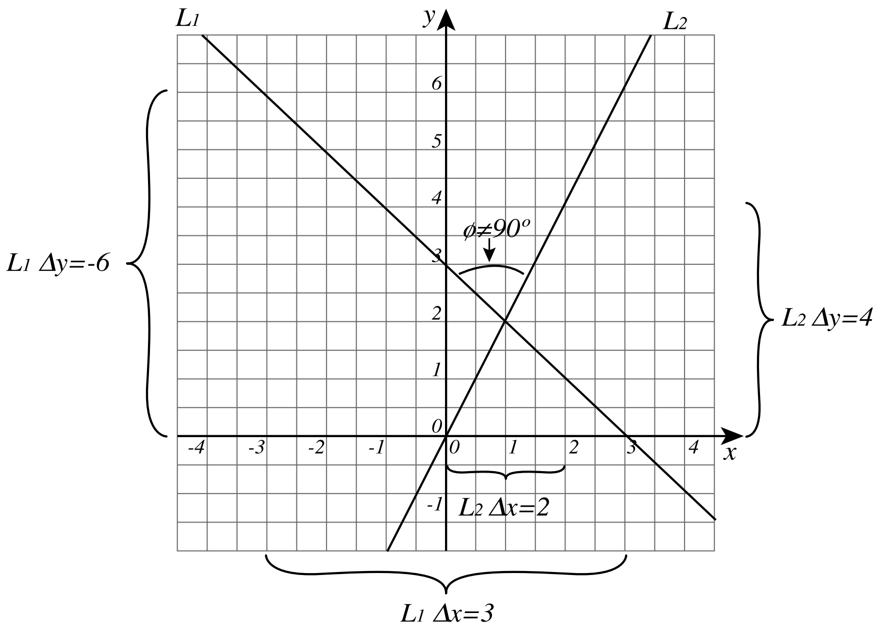
$$b_1 = b_2$$

Por lo que se cumple $L_1 = L_2 \leftrightarrow m_1 = m_2$

✓ **Intersección o concurrencia:**

Dos rectas se pueden cortar en uno y solamente un punto si, y sólo sí, no son paralelas entre sí.

$$L_1 \cap L_2 \leftrightarrow m_1 \neq m_2 \quad y \quad b_1 \neq b_2$$



$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6}{6} = 1 \qquad m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = +2$$

$$b_1 = 3 \qquad b_2 = 0$$

$$b_1 \neq b_2$$

Por lo que se cumple: $L_1 \cap L_2 \leftrightarrow m_1 \neq m_2 \quad y \quad b_1 \neq b_2$

Trabajo Colaborativo

Revisa los procedimientos para determinar el paralelismo y/o la perpendicularidad de dos rectas.

EJEMPLO

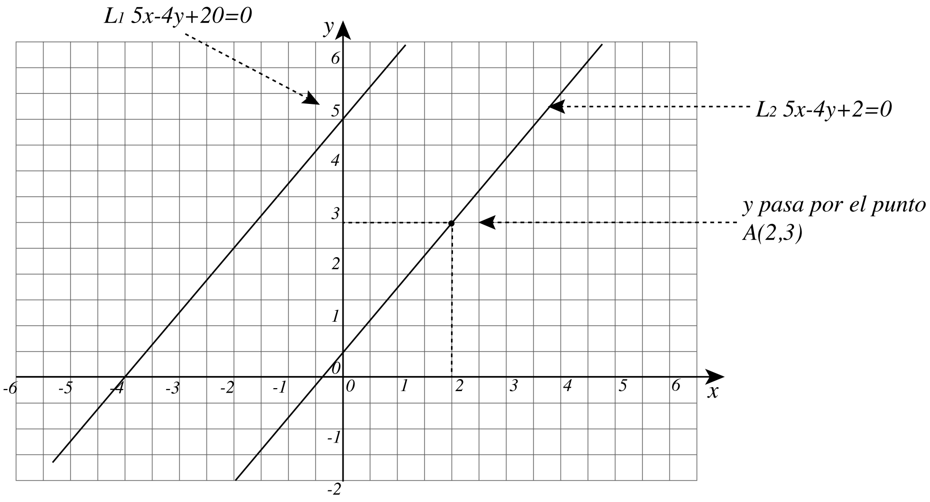
La ecuación de una recta en su forma general es
$5x - 4y + 20 = 0$

Encuentra la ecuación de la recta L_2 paralela que pasa por el punto A (2, 3).

Solución:

Sea la recta L_1 descrita por la ecuación general: $5x - 4y + 20 = 0$

Paso 1: Despejando la variable "$-4y$" se tiene que:	$5x - 4y + 20 = 0$ $-4y = -5x - 20$
Paso 2: Dividiendo ambos lados por -4 se tiene que:	$\frac{-4}{-4}\, y = \frac{-5}{-4}\, x - \frac{20}{-4}$
Paso 3: Realizando las operaciones de la división se tiene que:	$y = \frac{5}{4}\, x + 5$
• Por lo tanto se tiene que la pendiente es:	$m_1 = \frac{5}{4}$
• Y por la condición de paralelismo la pendiente de la recta L_2 es:	$L_1 \parallel L_2 \leftrightarrow m_1 = m_2$ $m_2 = \frac{5}{4}$
• Tomando el punto dado se tiene que:	$A\,(2, 3) = A\,(X_1, Y_1)$
Paso 4: Tomando la ecuación de la recta en su forma punto – pendiente se sustituyen los valores de la pendiente y el punto dado:	$y - y_1 = m\,(x - x_1)$ $y - 3 = \frac{5}{4}\,(x - 2)$
Paso 5: Realizando las operaciones correspondientes para encontrar la ecuación de la recta en su forma general se tiene que:	$4(y - 3) = 5(x - 2)$ $4y - 12 = 5x - 10$ $-5x + 4y - 12 + 10 = 0$ $-5x + 4y - 2 = 0$
Paso 6: Multiplicando por -1 se tiene que la ecuación de la recta L_2 que es paralela a L_1 que pasa por el punto A (2, 3) es:	$5x - 4y + 2 = 0$



$$L_1 \parallel L_2$$

$$5x - 4y + 20 = 0 \parallel 5x - 4y + 2 = 0$$

EJEMPLO

Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2, 2) y que es perpendicular a la recta $3x + 2y - 12 = 0$.

Solución:

Sea la recta L_1 descrita por la ecuación general: $3x + 2y - 12 = 0$

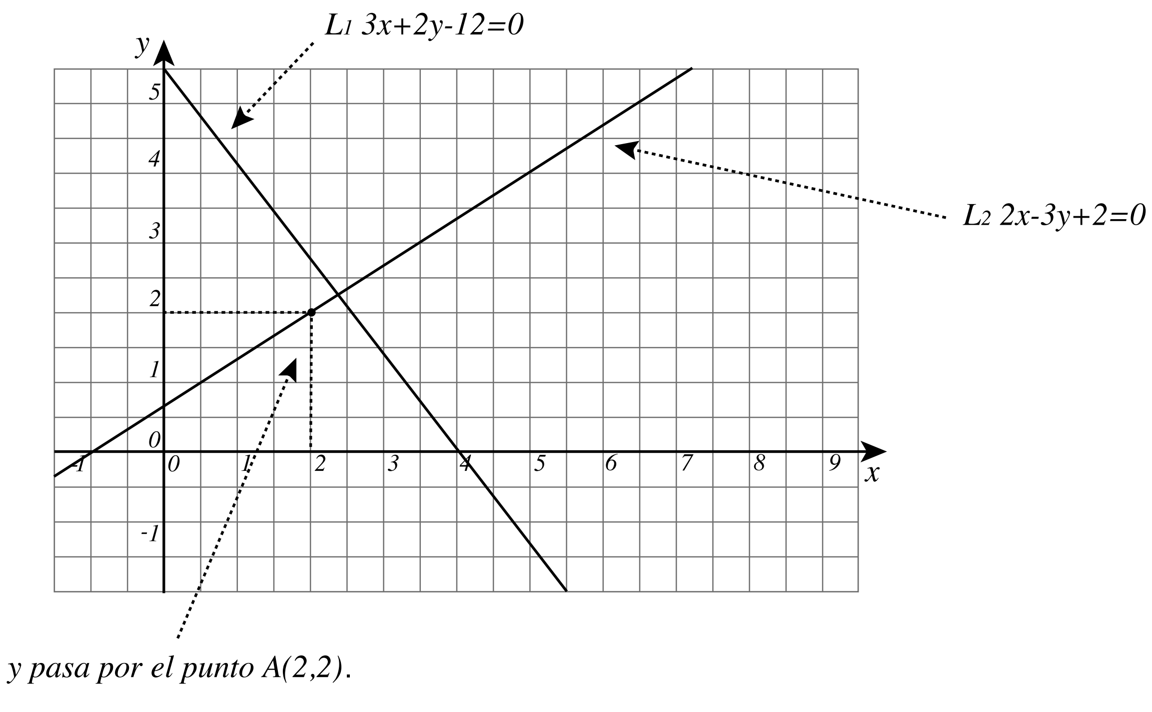
Paso 1: Despejando la variable "$2y$" se tiene que:	$3x + 2y - 12 = 0$ $2y = -3x + 12$
Paso 2: Dividiendo ambos lados por 2 se tiene que:	$\frac{2}{2}y = \frac{-3}{2}x + \frac{12}{2}$
Paso 3: Realizando las operaciones de la división se tiene que:	$y = \frac{-3}{2}x + 6$

- Por lo tanto se tiene que la pendiente es: $m_1 = \frac{-3}{2}$
- Y por la condición de perpendicularidad la pendiente m_2 de la recta L_2 es: $L_1 \perp L_2 \leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad \therefore \quad m_2 = -\frac{1}{\frac{-3}{2}} \quad \therefore \quad m_2 = \frac{2}{3}$$

- Tomando el punto dado se tiene que: $A(2, 2) = A(X_1, Y_1)$

Paso 4: Tomando la ecuación de la recta en su forma punto – pendiente se sustituyen los valores de la pendiente y el punto dado:	$y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 2 = \frac{2}{3}(x - 2)$
Paso 5: Realizando las operaciones correspondientes para encontrar la ecuación de la recta en su forma general se tiene que:	$3(y - 2) = 2(x - 2)$ $3y - 6 = 2x - 4$ $-2x + 3y - 6 + 4 = 0$ $-2x + 3y - 2 = 0$
Paso 6: Multiplicando por -1 se tiene que la ecuación de la recta L_2 que es perpendicular a L_1 y que pasa por el punto A (0, 3) es:	$2x - 3y + 2 = 0$



$$L_1 \perp L_2$$

$$3x + 2y - 12 = 0 \perp 2x - 3y + 2 = 0$$

EVALUACIÓN FORMATIVA

Trabajo Colaborativo

Resuelve los siguientes ejercicios mediante el procedimiento propuesto en los ejemplos anteriores.

EJERCICIO

Encontrando a ecuación de la recta.

Instrucciones: Encuentra la ecuación de la recta en su forma general $Ax + By + C = 0$ que pasa por un punto A (x_1, y_1), considera su paralelismo o perpendicularidad según se señale.

1) A(4, 7) y es paralela a la recta $y = 4x - 5$

Procedimiento:

Ecuación de la recta:

2) A (-4, 5) y es paralela a la recta $6x - 2y - 15 = 0$

Ecuación de la recta:

Individual

Resuelve los siguientes ejercicios mediante el procedimiento propuesto en los ejemplos anteriores.

1) A $(-4, 2)$ y es perpendicular a la recta $4x + 3y - 6 = 0$

Procedimiento:

Ecuación de la recta:

2) A $(0, 4)$ y es perpendicular a la recta $-5x + 2y + 3 = 0$

Ecuación de la recta:

Nota: Comparte los ejercicios anteriores con otro equipo para realizar una coevaluación, utiliza el instrumento de evaluación que se encuentra como anexo al final de la segunda unidad, para registrar el logro de los aprendizajes.

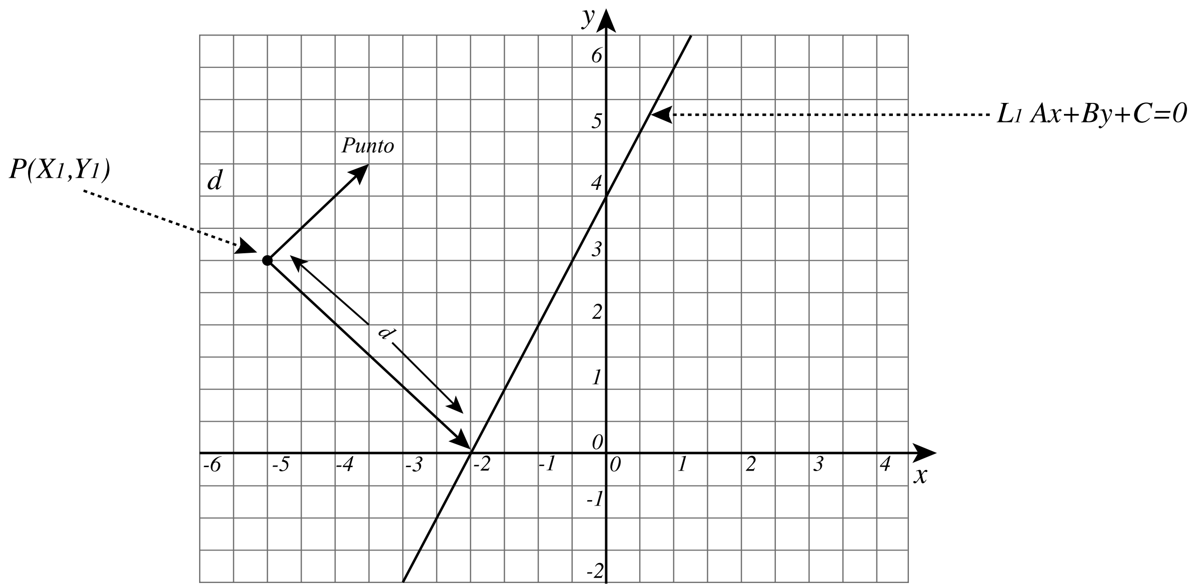
ACTIVIDAD 4.

Individual

Realiza una revisión documental de los conceptos básicos de distancia de un punto a una recta presentados a continuación:

8.5 Distancia de un punto a una recta:

La distancia d es la longitud del segmento de recta perpendicular dirigido del punto P(x_1, y_1) a la recta L_1 determinada por la ecuación $Ax + By + C = 0$.



El valor de la distancia d se determina al sustituir las coordenadas de punto P(x_1, y_1) y el valor de los coeficientes de la ecuación de la recta en la siguiente fórmula.

$$d = \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

En donde:

A, B y C son coeficientes de la ecuación de la recta $Ax + By + C = 0$ y (x_1, y_1) son las coordenadas del punto *P*.

Para el cálculo de la distancia se debe tomar las siguientes consideraciones:

Consideración 1:
Cuando el coeficiente B de la ecuación de la recta $Ax + By + C = 0$ es positivo se tomará el signo positivo en el denominador de la fórmula, como se muestra a continuación:

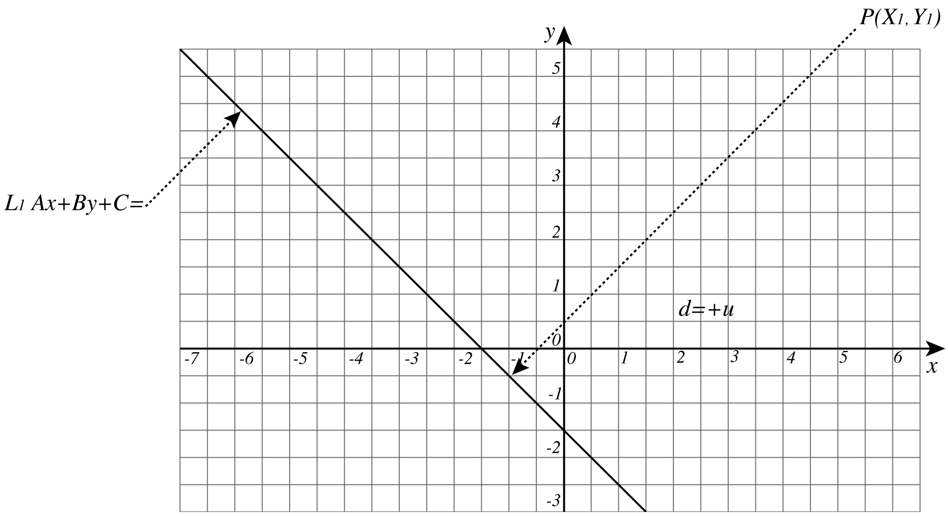
$$d = \frac{Ax + By + C}{+\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Consideración 2:
Pero si el coeficiente B la ecuación de la recta $Ax + By + C = 0$ es negativo se tomará el signo del denominador de la fórmula, como se muestra a continuación:

$$d = \frac{Ax + By + C}{-\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Consideración 3:
Si el resultado final del cálculo de la distancia es positivo significa que el punto $P(x_1, y_1)$. Se encuentra por arriba de la línea recta L_1 $Ax + By + C = 0$.

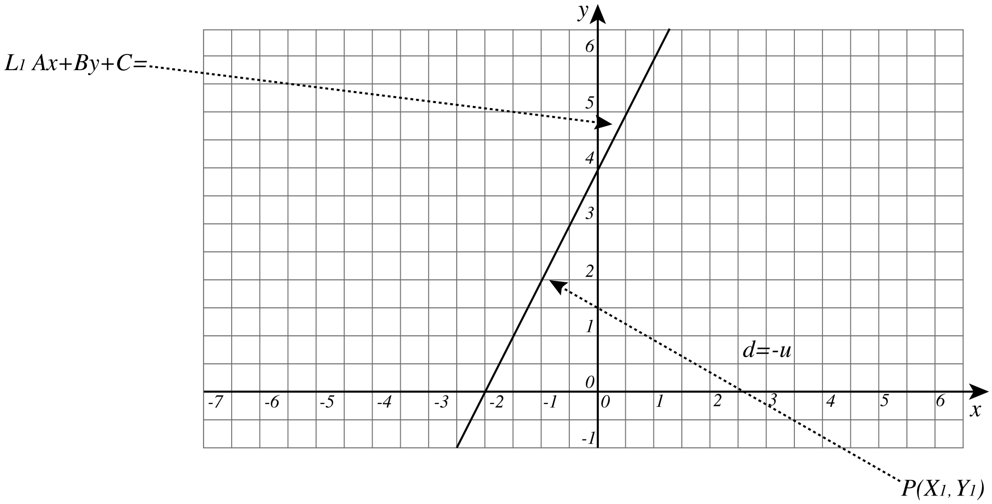
$$d = \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = +\ u$$



Consideración 4:

Si el resultado final del cálculo de la distancia es negativo significa que el punto $P(x_1, y_1)$. Se encuentra por abajo de la línea recta $L_1\ Ax + By + C = 0$.

$$d = \frac{Ax + By + C}{\pm\ \sqrt{A^2 + B^2}} = -\ u$$



Consideración 5:

La distancia es una unidad absoluta es decir no puede ser representada por números negativos. Por lo que las unidades de la distancia serán siempre positivas.

Como el resultado final es positivo se queda igual.

$$d = \frac{Ax + By + C}{\pm\ \sqrt{A^2 + B^2}} = +\ u$$

Como el resultado final es negativo se deberá cambiar a positivo.

$$d = \frac{Ax + By + C}{\pm\ \sqrt{A^2 + B^2}} = -\ u = +\ u$$

Consideración 6:

Si sólo se desea calcular la distancia (d) de un segmento de recta perpendicular no dirigida de la recta $L_1\ Ax + By + C = 0$ hacia el punto $P(x_1, y_1)$, se deberá aplicar el valor absoluto sin importar el signo en el denominador, como se muestra a continuación:

$$d = \left| \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Trabajo Colaborativo

Revisa los ejemplos para obtener distancia de un punto a una recta.

EJEMPLO

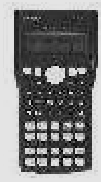
Encontrar la distancia dirigida del punto *P* (*-2, -1*) a la recta L_1 $4x + 3y - 15 = 0$.

Solución:

De lo anterior se tiene que: A = 4, B = 3, C = –15 y $x_1 = -2$, $y_1 = -1$

Como el coeficiente B = 3 o sea positivo se toma el signo positivo del denominador de la ecuación de la distancia:

$$d = \frac{Ax + By + C}{+\sqrt{A^2 + B^2}}$$



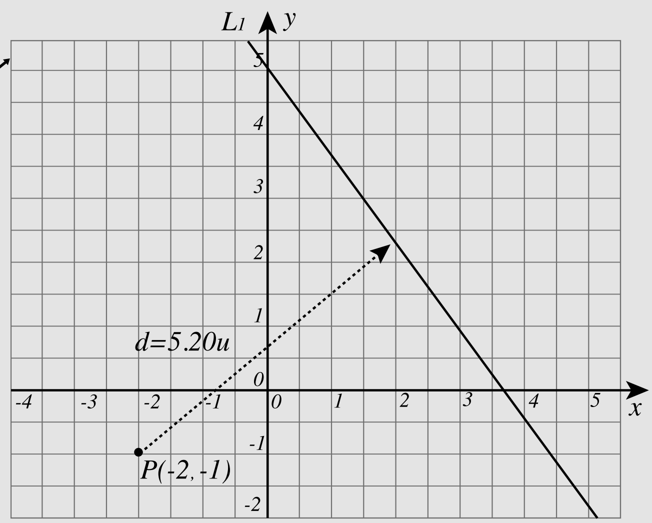
Consideración 1

Sustituyendo en los valores de los coeficientes y las coordenadas en la fórmula se tiene:

$$d = \frac{4(-2) + 3(-1) - 15}{+\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \frac{-8 - 3 - 15}{+\sqrt{16 + 9}} = \frac{-26}{+\sqrt{25}} = \frac{-26}{5} = -5.20\ u$$

Por lo tanto el punto *P*(-2, -1) se encuentra por abajo de la recta L_1 $4x + 3y - 15 = 0$

Consideración 4:



Por lo tanto el valor de la distancia es:

Consideración 5:

$$d = 5.20\ u$$

EJEMPLO

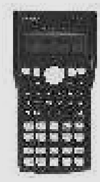
Encontrar la distancia dirigida del punto *P* (3, 4) a la recta L_1 $5x + 6y + 8 = 0$.

Solución:

De lo anterior se tiene que: A = 5, B = 6, C = 8 y $x_1 = 3$, $y_1 = 4$

Como el coeficiente B = 6 o sea positivo se toma el signo positivo del denominador de la ecuación de la distancia:

$$d = \frac{Ax + By + C}{+\sqrt{A^2 + B^2}}$$



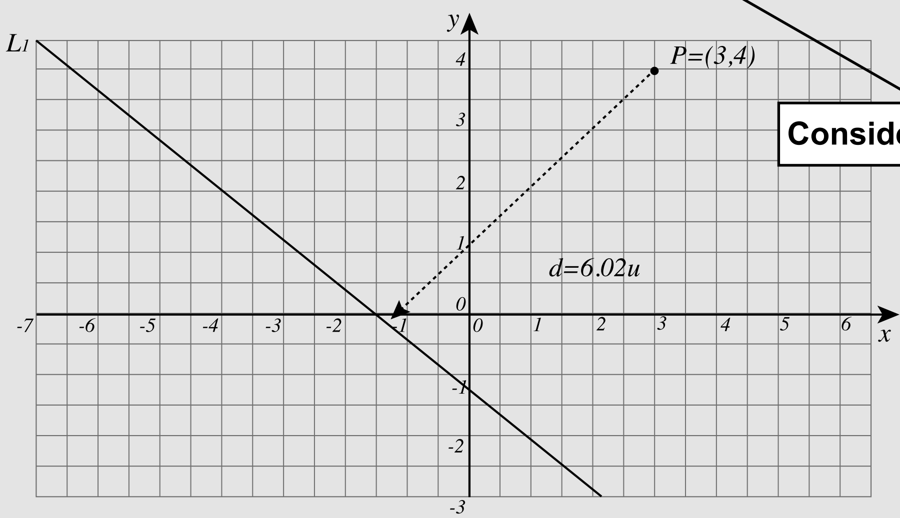
Consideración 1

Sustituyendo en los valores de los coeficientes y las coordenadas en la fórmula se tiene:

$$d = \frac{5(3) + 6(4) + 8}{+\sqrt{(5)^2 + (6)^2}} = \frac{15 + 24 + 8}{+\sqrt{25 + 36}} = \frac{47}{+\sqrt{61}} = \frac{47}{7.8} = 6.02\ u$$

Por lo tanto el punto *P* (3, 4) se encuentra por arriba de la recta L_1 $5x + 6y + 8 = 0$

Consideración 3:



Por lo tanto el valor de la distancia es:

Consideración 5:

$$d = 6.02\ u$$

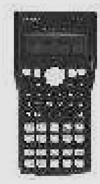
EJEMPLO

Encontrar la distancia dirigida del punto *P* (-5, 6) a la recta L_1 $3x - 4y + 12 = 0$.

Solución:

De lo anterior se tiene que: A = 3, B = –4, C = 12 y $x_1 = -5$, $y_1 = 6$

Como el coeficiente B = –4 o sea negativo se toma la ecuación de la distancia:



Consideración 2:

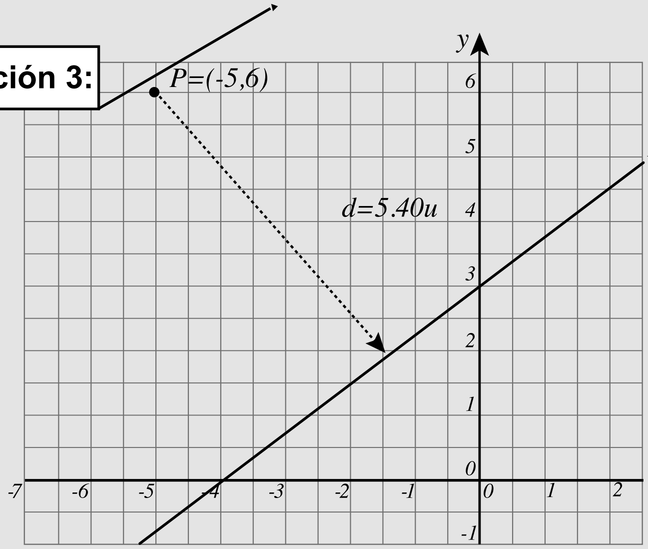
$$d = \frac{Ax + By + C}{-\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sustituyendo en los valores de los coeficientes y las coordenadas en la fórmula se tiene:

$$d = \frac{3(-5) - 4(6) + 12}{-\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{-15 - 24 + 12}{-\sqrt{9 + 16}} = \frac{-39 + 12}{-\sqrt{25}} = \frac{-27}{-5} = 5.40\ u$$

Por lo tanto el punto *P (-5, 6)* se encuentra por arriba de la recta L_1 $3x - 4y + 12 = 0$

Consideración 3:



Por lo tanto el valor de la distancia es:

Consideración 5:

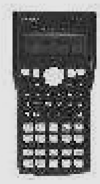
$$d = 5.40\ u$$

EJEMPLO **Encontrar la distancia dirigida del punto *P (6, -2)* a la recta $L_1\ 3x - 4y + 4 = 0$.**

Solución:

De lo anterior se tiene que: A = 3, B = –4, C = 4 y $x_1 = 6$, $y_1 = -2$

Como el coeficiente B = -4 o sea negativo se toma la ecuación de la distancia:



Consideración 2:

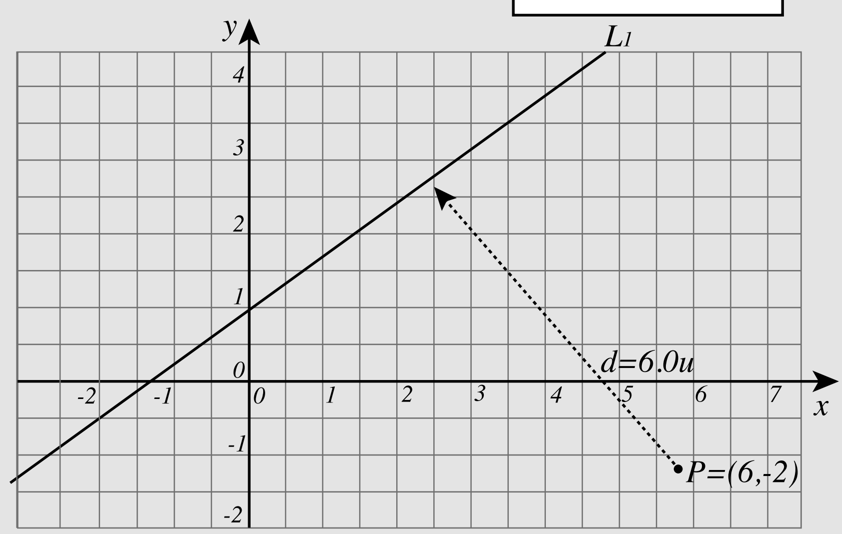
$$d = \frac{Ax + By + C}{-\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sustituyendo en los valores de los coeficientes y las coordenadas en la fórmula se tiene:

$$d = \frac{3(6) - 4(-2) + 4}{-\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{18 + 8 + 4}{-\sqrt{9 + 16}} = \frac{30}{-\sqrt{25}} = \frac{30}{-5} = -6.0\ u$$

Por lo tanto el punto *P (6, -2)* se encuentra por debajo de la recta $L_1\ 3x - 4y + 4 = 0$ como se muestra en la siguiente figura.

Consideración 4:



Por lo tanto el valor de la distancia es:

Consideración 5:

$$d = 6.0\ u$$

EJEMPLO

Encontrar la distancia no dirigida del punto *P (-5, 4)* a la recta L_1 $6x - 2y + 7 = 0$.

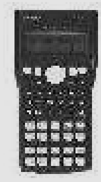
Solución:

De lo anterior se tiene que: A = 6, B = –2, C = 7 y $x_1 = -5$, $y_1 = 4$

Como se desea encontrar la distancia no dirigida de un punto a una recta se utiliza la fórmula:

Consideración 6:

$$d = \left| \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$



Sustituyendo en los valores de los coeficientes y las coordenadas en la fórmula se tiene:

$$d = \left| \frac{6(-5) - 2(4) + 7}{\sqrt{(6)^2 + (-2)^2}} \right| = \left| \frac{-30 - 8 + 7}{\sqrt{36 + 4}} \right| = \left| \frac{-38 + 7}{\sqrt{40}} \right| = \left| \frac{-31}{6.32} \right| = \left| -4.90 \right| u$$

Aplicando el valor absoluto se tiene que la distancia el resultado final es:

$$d = 4.90 \ u$$

Nota: Como es una distancia no dirigida no importa la posición del punto con referencia a la recta.

EVALUACIÓN SUMATIVA

Trabajo Colaborativo

Resuelve los siguientes ejercicios mediante el procedimiento propuesto en los ejemplos anteriores.

EJERCICIO

Instrucciones: Encuentra la distancia dirigida entre un punto *P* (x_1, y_1) y una recta L_1 $Ax + By + C = 0$ y determina si el punto se encuentra por arriba o por debajo con respecto a la recta.

1) Punto A (4, -6) y es la recta $12x + 5y - 6 = 0$

Procedimiento:

Ecuación de la recta:

Posición del punto ☐ arriba ☐ abajo

2) Punto A $(-2, -1)$ y es la recta $3x - 4y - 12 = 0$

Procedimiento:

Ecuación de la recta:

Posición del punto ☐ arriba ☐ abajo

Nota: Comparte los ejercicios anteriores con otro equipo para realizar una coevaluación, utiliza el instrumento de evaluación que se encuentra como anexo al final de la segunda unidad, para registrar el logro de los aprendizajes.

EVALUACIÓN PARA TU PORTAFOLIO DE EVIDENCIA

Individual

Resuelve los siguientes ejercicios mediante el procedimiento propuesto en los ejemplos anteriores.

1) Punto A $(4, -6)$ y es la recta $12x + 5y - 6 = 0$

Procedimiento:

Ecuación de la recta:

Posición del punto ☐ arriba ☐ abajo

2) Punto A $(-2, -1)$ y es la recta $3x - 4y - 12 = 0$

Procedimiento:

Ecuación de la recta:

Posición del punto ☐ arriba ☐ abajo

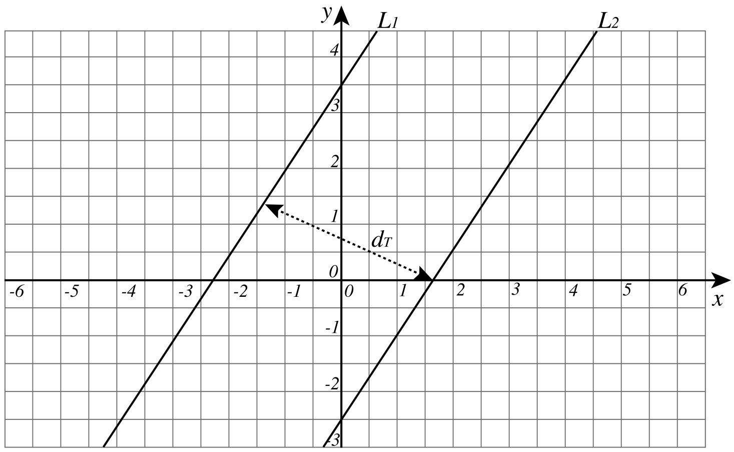
ACTIVIDAD 5.

Individual

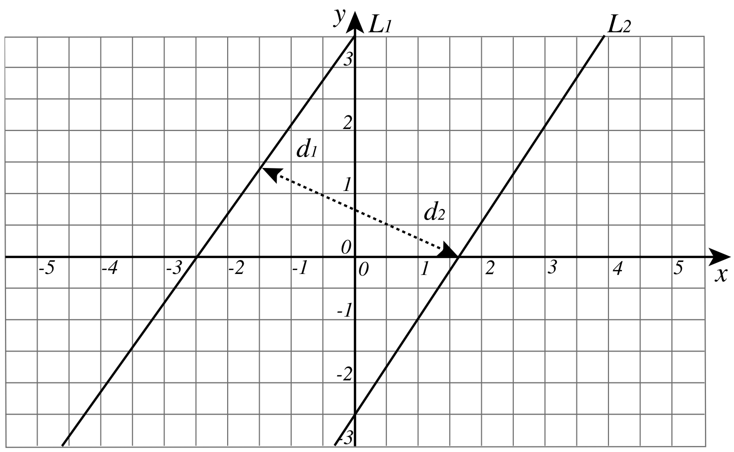
Realiza una revisión documental de los conceptos básicos de distancia entre dos rectas presentados a continuación:

8.6 Distancia entre dos rectas paralelas

La distancia d_T es la longitud del segmento de recta perpendicular que se encuentra entre dos rectas L_1 y L_2 como se muestra en la siguiente figura:



Por lo tanto la distancia d_T entre dos rectas paralelas es igual a la suma de la distancia de cada recta L_1 y L_2 con respecto al origen como se muestra en la siguiente figura.



Por lo tanto se tiene la siguiente fórmula.

$$d_T = d_1 + d_2$$

Como la distancia no dirigida entre un punto *P* (x, y) y una recta *L* $Ax + By + C = 0$ se puede calcular con la fórmula:

$$d = \left| \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Método 1:

Se tiene que para encontrar la distancia d_1 entre el origen *P* (x, y) y una recta L_1 $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ y considerando que las coordenadas del origen son *P* $(0, 0)$ se tiene que la fórmula de la distancia queda:

$$d_1 = \left| \frac{A_1(0) + B_1(0) + C_1}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2}} \right| = \left| \frac{C_1}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2}} \right|$$

Por lo anterior para encontrar la distancia d_2 y la recta L_2 $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ se tiene que:

$$d_2 = \left| \frac{A_2(0) + B_2(0) + C_2}{\sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}} \right| = \left| \frac{C_2}{\sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}} \right|$$

Por lo tanto para encontrar la distancia entre dos rectas paralelas es igual a:

$$d_T = d_1 + d_2$$

Método 2:

Como las pendientes en ambas rectas son iguales debido a su condición de paralelismo $m_1 = m_2$ se deben simplificar los coeficientes A y B en ambas ecuaciones de las rectas L_1 $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ y L_2 $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ para que sean iguales $A_1 = A_2$ y $B_1 = B_2$ quedando solamente los coeficientes $C_1 \neq C_2$ una vez realizado esta operación se puede utilizar la siguiente fórmula para calcular la distancia entre dos rectas paralelas:

$$d_T = \frac{\left| C_2 - C_1 \right|}{\sqrt{(A)^2 + (B)^2}}$$

Trabajo Colaborativo

Revisa los procedimientos para obtener la distancia entre dos rectas.

EJEMPLO

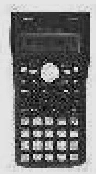
Encontrar la distancia entre dos rectas paralelas determinadas por sus ecuaciones:

$L_1 \;\; 6x - 8y - 24 = 0$ y $L_2 \;\; 3x - 4y + 12 = 0$

Solución:

$$A_1 = 6\,,\quad B_1 = -8\,,\quad C_1 = -24$$

$$A_2 = 3,\quad B_2 = -4,\quad C_2 = 12$$



Metodo 1:

$$d_1 = \left|\frac{C_1}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2}}\right| = \left|\frac{-24}{\sqrt{(6)^2 + (-8)^2}} = \frac{-24}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{-24}{\sqrt{100}} = \frac{-24}{10} = -2.40\right| = 2.40\;u$$

$$d_2 = \left|\frac{C_2}{\sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}}\right| = \left|\frac{12}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{12}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{12}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5} = 2.40\right| = 2.40\;u$$

$$d_T = d_1 + d_2$$

$$d_T = 2.40 + 2.40 = 4.80\;u$$

Metodo 2:

Tomando las rectas originales:

$L_1 \; 6x - 8y - 24 = 0$ y $L_2 \; 3x - 4y + 12 = 0$

Para simplificar la recta L_1 se divide entre dos y la recta L_2 queda igual se tiene que:

$L_1 \;\; 3x - 4y - 12 = 0$ y $L_2 \; 3x - 4y + 12 = 0$

Solución:

$$A_1 = 3\,,\quad B_1 = -4\,,\quad C_1 = -12$$

$$A_2 = 3,\quad B_2 = -4,\quad C_2 = 12$$

$$d_T = \frac{\left|C_2 - C_1\right|}{\sqrt{(A)^2 + (B)^2}} = \frac{12 - (-12)}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{12 + 12}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{24}{\sqrt{25}} = \frac{24}{5} = 4.80\;u$$

Nota: Se observa que con ambos métodos se obtiene los mismos resultados.

EJEMPLO

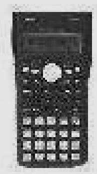
Encontrar la distancia entre dos rectas paralelas determinadas por sus ecuaciones.

$$L_1 \quad 2x + 3y - 4 = 0 \quad \text{y} \quad L_2 \quad -4x - 6y + 24 = 0$$

Solución:

$$A_1 = 2\,, \quad B_1 = 3\,, \quad C_1 = -4$$

$$A_2 = -4, \quad B_2 = -6, \quad C_2 = 24$$



Metodo 1:

$$d_1 = \left| \frac{C_1}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2}} \right| = \left| \frac{-4}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2}} = \frac{-4}{\sqrt{4+9}} = \frac{-4}{\sqrt{13}} = \frac{-4}{3.60} = -1.11 \quad = \right| 1.11\, u$$

$$d_2 = \left| \frac{C_2}{\sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}} \right| = \left| \frac{24}{\sqrt{(-4)^2 + (-6)^2}} = \frac{24}{\sqrt{16+36}} = \frac{24}{\sqrt{52}} = \frac{24}{7.21} \right| = \quad 3.32\, u$$

$$d_T = d_1 + d_2$$

$$d_T = 1.11 + 3.32 = 4.43\, u$$

Metodo 2:

Tomando las rectas originales:

$$L_1 \quad 2x + 3y - 4 = 0 \quad \text{y} \quad L_2 \quad -4x - 6y + 24 = 0$$

Para simplificar la recta L_2 se divide entre dos y la recta L_1 queda igual se tiene que:

$$L_1 \quad 2x + 3y - 4 = 0 \quad \text{y} \quad L_2 \quad -2x - 3y + 12 = 0$$

Solución:

$$A_1 = 2\,, \quad B_1 = 3\,, \quad C_1 = -4$$

$$A_2 = -2, \quad B_2 = -3, \quad C_2 = 12$$

$$d_T = \frac{\left| C_2 - C_1 \right|}{\sqrt{(A)^2 + (B)^2}} = \frac{12 - (-4)}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2}} = \frac{12+4}{\sqrt{4+9}} = \frac{16}{\sqrt{13}} = \frac{16}{3.60} = 4.44\, u$$

Nota: Se observa que con ambos métodos se obtiene los mismos resultados.

EVALUACIÓN FORMATIVA

Resuelve en colaboración con tus compañeros los siguientes ejercicios mediante el procedimiento propuesto en los ejemplos anteriores.

EJERCICIO

Encuentra la distancia entre las rectas:

$L_1 \quad Ax + By + C = 0$ y $L_2 \quad Ax + By + C = 0$

1) $L_1 \quad 3x + 4y + 8 = 0$ y $L_2 \quad 6x + 8y - 24 = 0$

Procedimiento:

Distancia Método 1:

Distancia Método 2:

2) $L_1 \quad 15x + 8y + 30 = 0$ y $L_2 \quad 30x + 16y - 8 = 0$

Procedimiento:

Distancia Método 1:

Distancia Método 2:

ACTIVIDAD

Individual

Resuelve los siguientes ejercicios mediante el procedimiento propuesto en los ejemplos anteriores.

1) $9x + 12y - 27 = 0$ y L_2 $18x + 24y + 66 = 0$

Procedimiento:

Distancia Método 1:

Distancia Método 2:

1) L_1 $20x - 21y - 20 = 0$ y L_2 $40x - 42y - 32 = 0$

Procedimiento:

Distancia Método 1:

Distancia Método 2:

ACTIVIDAD 6.

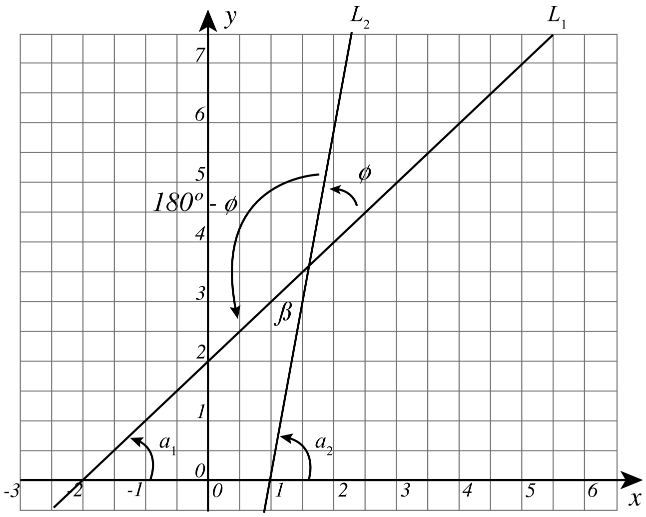
Individual

Realiza una revisión documental de los conceptos básicos de ángulo entre dos rectas presentados a continuación:

8.7 Ángulo entre dos rectas

En el estudio de la recta, los ángulos están directamente relacionados, ya que precisamente, los lados del ángulo son líneas rectas.

El ángulo que se forma en la intersección de un par de rectas se puede calcular en función de sus pendientes.



La relación para obtener el valor del ángulo ø entre dos rectas está dada por:

$$\tan \emptyset = \frac{m_2 - m_1}{1 + [(m_2)(m_1)]}$$

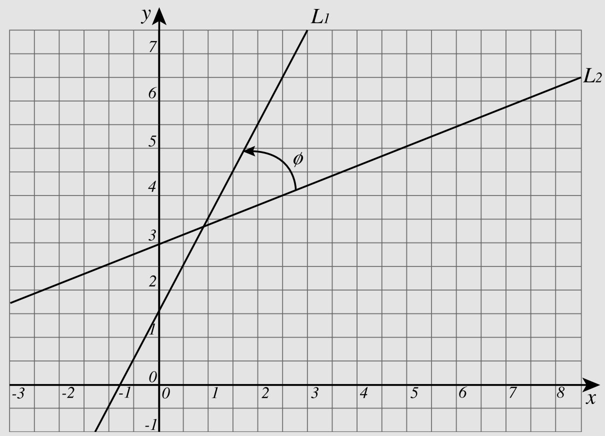
Para aplicar esta relación se debe determinar cuál es la pendiente m_1 y cuál es la pendiente m_2.

Para ello, se debe seguir las siguientes consideraciones:

1. Si las dos pendientes son **positivas**: m_2 es la mayor y m_1 la menor.
2. Cuando una pendiente es **positiva** y la otra **negativa**: m_2 es la pendiente negativa y m_1 es la positiva.
3. Cuando las dos pendientes **son negativas**: la pendiente m_2 es la de mayor valor absoluto y la pendiente m_1 es el menor valor absoluto.

En colaboración,revisa los procedimientos para obtener el ángulo entre dos rectas.

EJEMPLO **Determinar el valor del ángulo que forman las rectas L_1 $4x - 2y + 3 = 0$ con L_2 $2x - 5y + 15 = 0$.**



Solución:

Paso 1: Para encontrar las pendientes se pueden utilizar dos métodos los cuales a continuación se describen.

Método 1: Expresamos las ecuaciones de las rectas en su forma pendiente-ordenada.

De la ecuación de la recta L_1

$$4x - 2y + 3 = 0$$
$$-2y = -4x - 3$$
$$y = \frac{-4x - 3}{-2}$$
$$y = \frac{4x}{2}\,x + \frac{3}{2}$$
$$m = 2$$

De la ecuación de la recta L_2

$$2x - 5y + 15 = 0$$
$$-5y = -2x - 15$$
$$y = \frac{-2x - 15}{-5}$$
$$y = \frac{2x}{5}\,x + 3$$
$$m = \frac{2}{5}$$

Metodo 2: O también se puede calcular la pendiente directamente con los coeficientes A y B de las ecuaciones de las rectas L_1 $Ax + By + C = 0$ y L_2 $Ax + By + C = 0$ utilizando la siguiente fórmula:

$$\mathrm{m} = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$$

L_1 $4x \ -2y \ +3 = 0$ $\qquad A = 4 \ , \ B = -2$ $\qquad \mathrm{m} = -\frac{4}{-2} = 2$

L_2 $2x \ -5y \ +15 = 0$ $\qquad A = 2 \ , \ B = -5$ $\qquad \mathrm{m} = -\frac{2}{-5} = \frac{2}{5}$

Como se puede observar con ambos métodos se obtienen las mismas pendientes.

Paso 2: Determinar m_1 y m_2 de acuerdo a las consideraciones descritas anteriormente.

a) Como la pendiente de la recta L_1 $4x - 2y + 3 = 0$ *es* $\mathrm{m} = 2$

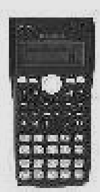
b) Y la pendiente de la recta L_2 $2x - 5y + 15 = 0$ es $\mathrm{m} = \frac{2}{5}$

Por lo tanto de acuerdo a la *consideración 1* "Si las dos pendientes son **positivas**: m_2 es la mayor y m_1 la menor" se tiene que:

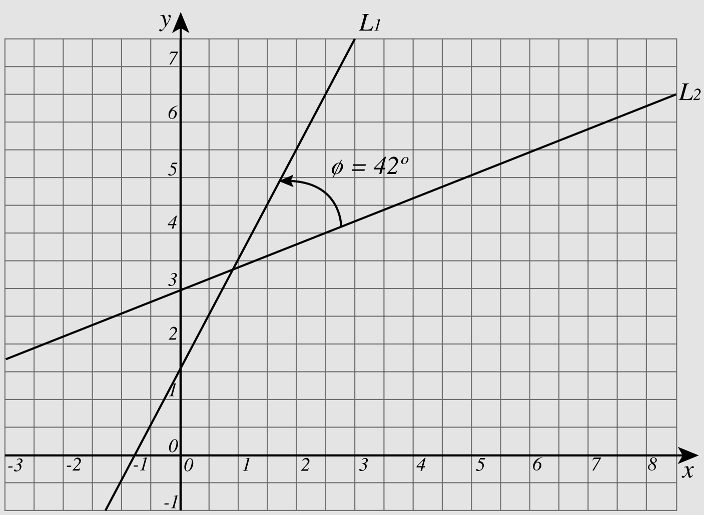
$$m_2 = 2 \qquad \text{y} \qquad m_1 = \frac{2}{5}$$

Paso 3: Sustituir los valores de las pendientes m_1 y m_2 en la siguiente fórmula:

$$\tan \emptyset = \frac{m_2 - m_1}{1 + [(m_2)(m_1)]} = \frac{2 - \frac{2}{5}}{1 + [(2)\left(\frac{2}{5}\right)]} = \frac{\frac{10}{5} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{(8)\cancel{(5)}}{\cancel{(5)}(9)} = \frac{8}{9} = 0.88$$

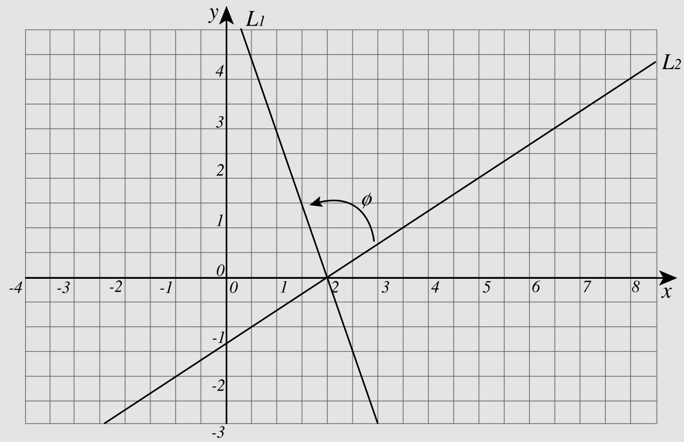


Paso 4: Por lo tanto el valor del ángulo será: $\emptyset = \tan^{-1} 0.88 \quad \therefore \quad \emptyset = 41.63°$



EJEMPLO

Determinar el valor del ángulo que forman las rectas
$L_1\ 3x + y - 6 = 0$ con $L_2\ 2x - 3y - 4 = 0$.



Solución:

Paso 1: Para encontrar las pendientes se pueden utilizar dos métodos los cuales a continuación se describen.

Método 1: Expresamos las ecuaciones de las rectas en su forma pendiente-ordenada.

De la ecuación de la recta L_1

$$3x + y - 6 = 0$$
$$y = -3x + 6$$
$$m = -3$$

De la ecuación de la recta L_2

$$2x - 3y - 4 = 0$$
$$-3y = -2x + 4$$
$$y = \frac{-2x + 4}{-3}$$
$$y = \frac{-2x}{-3}\, x - \frac{4}{3}$$
$$m = \frac{2}{3}$$

Metodo 2: O también se puede calcular la pendiente directamente con los coeficientes A y B de las ecuaciones de las rectas L_1 $Ax + By + C = 0$ y L_2 $Ax + By + C = 0$ utilizando la siguiente fórmula:

$$m = -\frac{A}{B}$$

L_1 $3x + y - 6 = 0$ $\quad A = 3$, $B = 1$ $\quad m = -\frac{3}{1} = -3$

L_2 $2x - 3y - 4 = 0$ $\quad A = 2$, $B = -3$ $\quad m = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$

Como se puede observar con ambos métodos se obtienen las mismas pendientes.

Paso 2: Determinar m_1 y m_2 de acuerdo a las consideraciones descritas anteriormente.

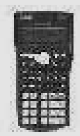
a) Como la pendiente de la recta L_1 $3x + y - 6 = 0$ es $m = -3$

b) Y la pendiente de la recta L_2 $2x - 3y - 4 = 0$ es $m = \frac{2}{3}$

Por lo tanto de acuerdo a la *consideración 2* "Cuando una pendiente es **positiva** y la otra **negativa**: m_2 es la pendiente negativa y m_1 es la positiva" se tiene que:

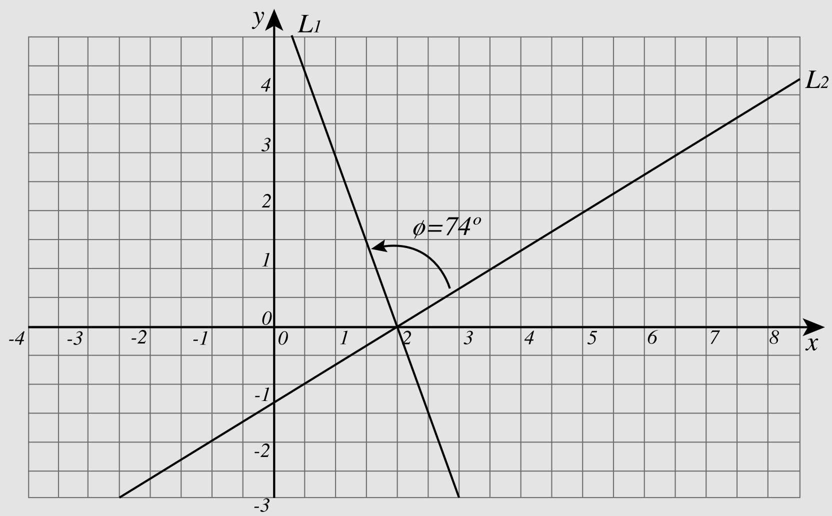
$$m_2 = \frac{2}{3} \qquad \text{y} \qquad m_1 = -3$$

Paso 3: Sustituir los valores de las pendientes m_1 y m_2 en la siguiente fórmula:

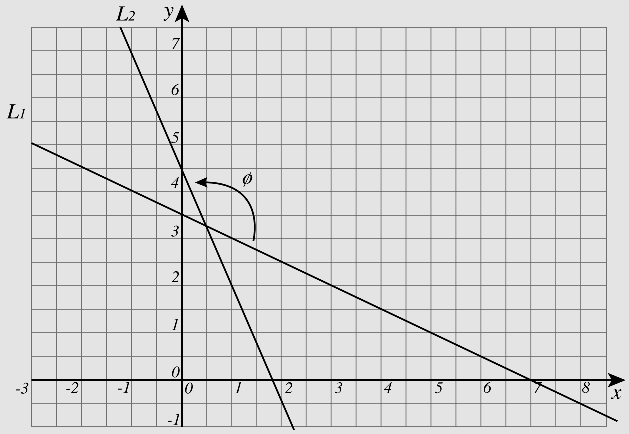


$$\tan \emptyset = \frac{m_2 - m_1}{1 + [(m_2)(m_1)]} = \frac{-3\,\frac{2}{3}}{1 + [(-3)\left(\frac{2}{3}\right)]} = \frac{-3\,\frac{2}{3}}{1 - \frac{6}{3}} = \frac{\frac{-11}{3}}{1 - 2} = \frac{\frac{-11}{3}}{-1} = \frac{11}{3} = 3.66$$

Paso 4: Por lo tanto el valor del ángulo será: $\emptyset = \tan^{-1} 3.66 \quad \therefore \quad \emptyset = 74.71°$



EJEMPLO **Determinar el valor del ángulo que forman las rectas**
$L_1\ x + 2y - 7 = 0$ **con** $L_2\ 8x + 3y - 14 = 0.$



Solución:

Paso 1: Para encontrar las pendientes se pueden utilizar dos métodos los cuales a continuación se describen.

Método 1: Expresamos las ecuaciones de las rectas en su forma pendiente-ordenada.

De la ecuación de la recta L_1

$$x + 2y - 7 = 0$$
$$2y = -x + 7$$
$$y = \frac{-x+7}{2}$$
$$y = \frac{-x}{2}x + \frac{7}{2}$$
$$m = -\frac{1}{2}$$

De la ecuación de la recta L_2

$$8x + 3y - 14 = 0$$
$$3y = -8x + 14$$
$$y = \frac{-8x+14}{3}$$
$$y = \frac{-8x}{3}x + \frac{14}{3}$$
$$m = -\frac{8}{3}$$

Metodo 2: O también se puede calcular la pendiente directamente con los coeficientes A y B de las ecuaciones de las rectas L_1 $Ax+By+C=0$ y L_2 $Ax+By+C=0$ utilizando la siguiente fórmula:

$$m = -\frac{A}{B}$$

L_1 $x + 2y - 7 = 0$ $\quad A = 1$, $B = 2$ $\quad m = -\frac{1}{2}$

L_2 $8x + 3y - 14 = 0$ $\quad A = 8$, $B = 3$ $\quad m = -\frac{8}{3}$

Como se puede observar con ambos métodos se obtienen las mismas pendientes.

Paso 2: Determinar m_1 y m_2 de acuerdo a las consideraciones descritas anteriormente.

a) Como la pendiente de la recta L_1 $x + 2y - 7 = 0$ es $m = -\frac{1}{2}$

b) Y la pendiente de la recta L_2 $8x + 3y - 14 = 0$ es $m = -\frac{8}{3}$

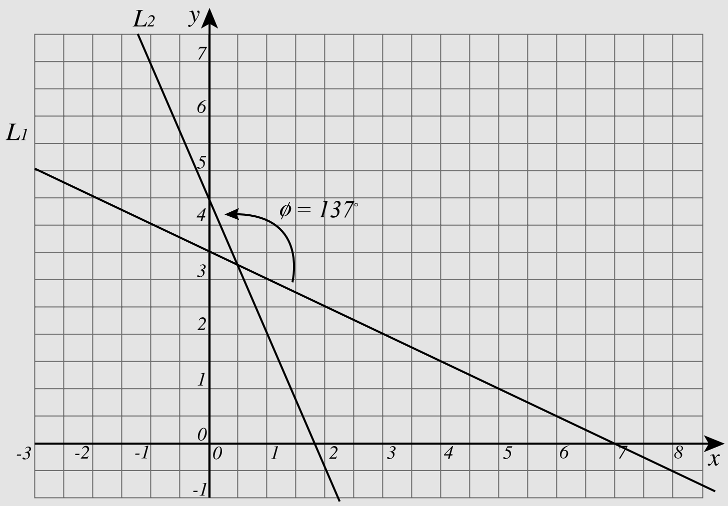
Por lo tanto de acuerdo a la *consideración 3* "Cuando las dos pendientes son **negativas**: la pendiente m_2 es la de mayor valor absoluto y la pendiente m_1 es el menor valor absoluto" se tiene que:

$$m_2 = -\frac{8}{3} \quad \text{y} \quad m_1 = -\frac{1}{2}$$

Paso 3: Sustituir los valores de las pendientes m_1 y m_2 en la siguiente fórmula:

$$\tan \emptyset = \frac{m_2 - m_1}{1 + [(m_2)(m_1)]} = \frac{-\frac{8}{3} - (-\frac{1}{2})}{1 + [\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)]} = \frac{-\frac{8}{3} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{8}{6}} = \frac{-\frac{13}{6}}{\frac{14}{6}} = \frac{(-13)(\cancel{6})}{(14)(\cancel{6})} = \frac{-13}{14} = -0.92$$

Paso 4: Por lo tanto el valor del ángulo será:
ø = tan^{-1} – 0.92 $\therefore$ ø = – 42.61° como el ángulo es negativo se debe realizar la siguiente operación: 180° – 42.61° = 137.39°



Resuelve los siguientes ejercicios mediante el procedimiento propuesto en los ejemplos anteriores.

EJERCICIO

Encuentra el ángulo formado por las rectas:

$$L_1 \quad Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad L_2 \quad Ax + By + C = 0$$

1) $3x + 2y - 7 = 0$ y L_2 $2x - y + 4 = 0$

Procedimiento:

ø

2) $5x - 3y - 15 = 0$ y L_2 $x - 4y + 4 = 0$

Procedimiento:

ø

EVALUACIÓN PARA TU PORTAFOLIO DE EVIDENCIA

Individual

Resuelve los siguientes ejercicios mediante el procedimiento propuesto en los ejemplos anteriores.

1) $2x + 5y - 10 = 0$ y L_2 $x - 4y + 12 = 0$

Procedimiento:

ø

2) $2x - 3y + 10 = 0$ y L_2 $x + 4y - 6 = 0$

Procedimiento:

ø

Autoevaluación

Actividad:	Fecha:	Grupo:

Nombre de los integrantes del equipo:

1.-
2.-
3.-
4.-

LISTA DE COTEJO

Indicador	Si	No	Observaciones
1.- Realiza las operaciones en cada ejercicio.			
2.- Los procedimientos están limpios, claros y entendibles.			
3.- Los procedimientos corresponden con los abordados en los temas anteriores.			
4.- Los resultados están simplificados a su mínima expresión.			
Nota: Si todos están contestados de manera positiva (SI) infórmalo a tu profesor, de lo contrario regrésalo al equipo coevaluado.			

ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA TRABAJAR

1.- Localiza y enlista videos de ***YouTube*** con temas correspondientes a:

a) Secciones cónicas.
b) El cono de Apolonio de Perga.
c) Uso de la geometría analítica.
d) Historia de la geometría analítica.
e) Trazado de rectas, circunferencias y cónicas.
f) Relación de la geometría analítica con otras disciplinas.

2.- Identifica quién realiza el video, a qué instituto pertenece o qué conocimientos del tema tienen quienes lo realizan. Es muy importante conocer la fuente, porque esto nos habla de la confiabilidad de la información que ahí se presenta.

3.- Con ayuda de tu maestro, realicen debates acerca de los temas o trabajos en equipo acerca de los materiales encontrados en la red. En caso de que no se encuentren en el mismo lugar, algunas herramientas de Google, como la de Grupos o Meet, podrían ser una buena alternativa.

4.- Piensen en los siguientes aspectos cuando realicen estas actividades, estos puntos podrían servir de detonantes para realizar debates:

a) ¿Cómo se construyen las distintas ecuaciones que representan cada una de las figuras, como la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola?
b) Elementos que caracterizan cada una de las figuras.
c) Elementos históricos de cada una de las figuras.
d) ¿Qué aplicaciones tienen en la vida cotidiana?
e) ¿Cómo ha ayudado la geometría analítica para el desarrollo de otras disciplinas?

VIDEOS SUGERIDOS

1.-Las Leyes de Kepler. La ciencia para todos.	2.-Historia y aplicaciones de las cónicas	3.- Cónicas
4.- Secciones cónicas	5.- Cono de Apolonio	

3 UNIDAD

La circunferencia y las secciones cónicas como lugar geométrico.

Propósito de la asignatura:

Que el estudiante utilice los sistemas coordenados de representación para ubicarse en el plano, desarrolle estrategias para el tratamiento de los lugares geométricos como disposiciones en el plano e incorpore los métodos analíticos a problemas geométricos.

Competencias genéricas

2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.

4. Escucha, interpreta y emite mensajes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

8. Participa y colabora de manera efectiva en grupos diversos.

Atributo de las Competencias Genéricas

2.1 Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.

4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.

Competencias disciplinares

M1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

M4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

M6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

M8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Tercera unidad

Eje disciplinar	Componentes
Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico.	Sistemas de referencia y localización: Elementos de Geometría analítica.

Contenidos centrales	Contenidos específicos	Aprendizajes Esperados

· Reconocimiento y construcción de los lugares geométricos. Recta, circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.
 	
· Tratamiento visual y representaciones múltiples de los lugares geométricos: coordenadas rectangulares y paramétricas, puntos singulares, raíces y comportamiento asintótico.
	· Introducción a la circunferencia y las secciones cónicas
	
	· La circunferencia
	
	· Secciones cónicas
	
	  · La parábola
	
	  · La elipse
	
	  · La hipérbola
	
	· Ecuación general de segundo grado
		· Interpreta y construye relaciones algebraicas para lugares geométricos. Ecuación general de los lugares geométricos básicos.
		
		· Caracteriza y distingue a los lugares geométricos según sus disposiciones y sus relaciones.
		
		· Dibuja un cono y visualizan cortes prototípicos (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola).
		
		· Analiza los elementos y la estructura de la ecuación general de segundo grado para las cónicas.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

1. - ¿Qué entiendes por circunferencia?

2. - ¿Es lo mismo círculo que circunferencia?

3. - ¿Qué entiendes por secciones cónicas?

4. - Escribe la regla del binomio al cuadrado.

5. - Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado.

5.1) $(x+3)^2 =$ **5.2)** $(y-8)^2 =$

5.3) $\left(x-\frac{5}{3}\right)^2 =$ **5.4)** $\left(\frac{y}{5}+1\right)^2 =$

5.5) $\left(\frac{3x}{2}+\frac{4}{5}\right)^2 =$

6. - Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando el método de completar el trinomio cuadrado perfecto.

6.1) $x^2+8x-9=0$ **6.2)** $x^2+6x-7=0$

6.3) $x^2+5x+1=0$ **6.4)** $2x^2+5x+1=0$

6.5) $5x^2+3x \quad 7=0$

Introducción a la circunferencia y las secciones cónicas.

Las ecuaciones de las figuras que revisaremos en esta unidad las podemos representar como ecuaciones de segundo grado, las cuales tienen la siguiente estructura algebraica:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey \quad F = 0$$

A esta le podemos llamar ecuación general de segundo grado.

Por otra parte, también utilizaremos otro tipo de representación algebraica, a la cual llamaremos ecuación ordinaria o canónica, el siguiente ejemplo muestra una representación canónica para un tipo de parábola.

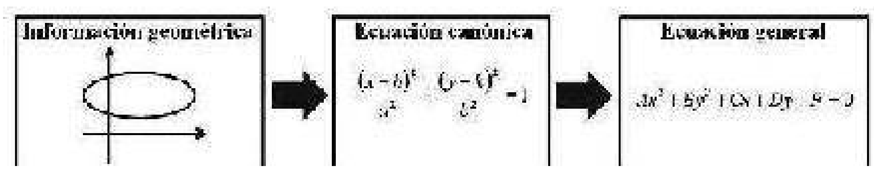
$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

La diferencia trascendental entre la ecuación general de segundo grado y su representación canónica radica en el hecho, que la ecuación general no nos permite de manera directa establecer las características geométricas de la figura representada, mientras que la ecuación canónica si nos permite visualizar características geométricas directamente, sin tener que hacer manipulaciones algebraicas sobre ella.

Esto nos lleva a dos problemas que plantearemos en los siguientes temas:

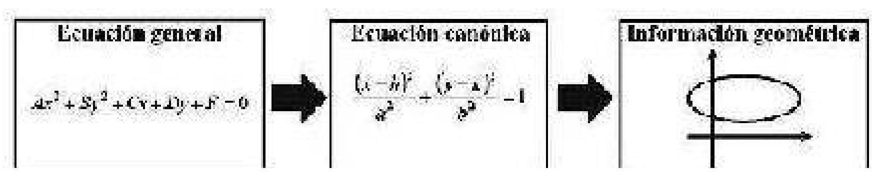
1.- Si tenemos información geométrica, el objetivo será obtener la ecuación general de segundo grado.

Es decir, que a partir de la información geométrica estableceremos la forma canónica y esta la desarrollaremos para obtener su forma general.



2.- Si tenemos la ecuación general de segundo grado, el objetivo será obtener la información geométrica.

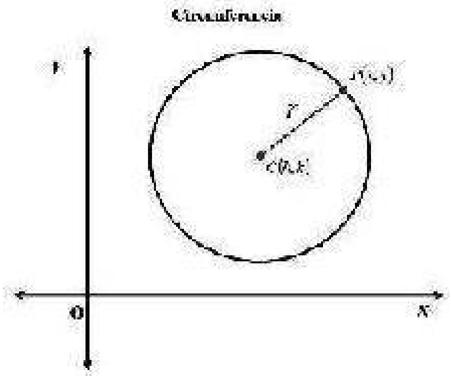
Para esto, tendremos que manipular algebraicamente la ecuación general para obtener su representación canónica, de donde fácilmente se puede obtener la información geométrica.



Este será el método con el que estaremos trabajando a continuación.

9. LA CIRCUNFERENCIA.

Definamos a la circunferencia como el lugar geométrico de todos los puntos cuya distancia de un punto fijo a la curva, siempre es constante, al punto fijo le llamamos centro y a la distancia constante radio.



Como la distancia al centro no cambia, la ecuación de la circunferencia la podemos construir considerando la figura anterior.

$$\overline{CP} = r$$

Donde las coordenadas de los puntos ***C*** y ***P*** son ***C (h, k)*** y ***P (x, y)*** y la distancia entre estos puntos la llamamos r, apliquemos la fórmula de distancia.

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Por lo tanto, podemos decir que la ecuación canónica de la circunferencia será:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Si el centro de la circunferencia es el origen, entonces.

$$(h,k) = (0,0)$$

EJEMPLO

Determina la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 4.

Tenemos entonces como información geométrica:

$$(h,k) = (0,0) \quad y \quad r = 4$$

Sustituimos en su ecuación canónica:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = (4)^2$$

Desarrollamos:

$$x^2 + y^2 = 16$$

La ecuación en su forma general será:

$$x^2 + y^2 - 16 = 0$$

EJEMPLO **Determina la ecuación de la circunferencia con centro (3, 5) y radio 3**

Tenemos entonces como información geométrica:

$$(h,k)=(3,5) \quad y \quad r=3$$

Sustituimos en su ecuación canónica:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-3)^2+(y-5)^2=(3)^2$$

Desarrollamos:

$$x^2-6x+9+y^2-10y+25=9$$
$$x^2+y^2-6x-10y+9+25-9=0$$

La ecuación en su forma general será:

$$x^2+y^2-6x-10y+25=0$$

EJEMPLO **Determina la ecuación de la circunferencia con centro (-4, 6) y radio 5**

Tenemos entonces como información geométrica:

$$(h,k)=(-4,6) \quad y \quad r=5$$

Sustituimos en su ecuación canónica

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-(-4))^2+(y-6)^2=(5)^2$$
$$(x+4)^2+(y-6)^2=(5)^2$$

Desarrollamos

$$x^2+8x+16+y^2-12y+36=25$$
$$x^2+y^2+8x-12y+16+36-25=0$$

La ecuación en su forma general será:

$$x^2+y^2+8x-12y+27=0$$

ACTIVIDAD 1. **Encuentra la ecuación general para cada una de las circunferencias siguientes.**

1) $C(7,2) \quad y \quad r = 4$

2) $C(-5,1) \quad y \quad r = 10$

3) $C(5,0) \quad y \quad r = \frac{4}{3}$

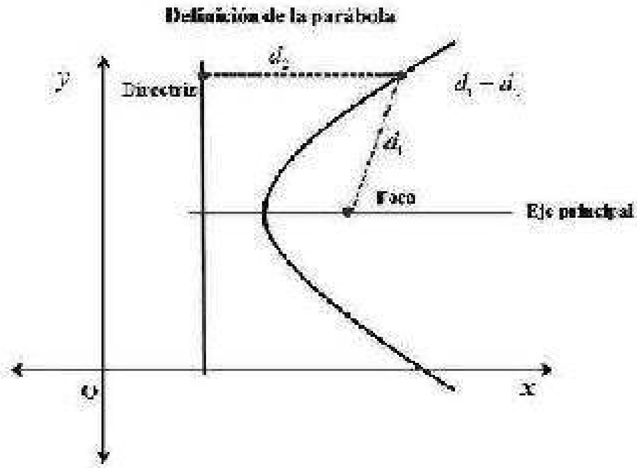
4) $C(0,-2) \quad y \quad r = 2$

5) $C\left(\frac{2}{3},\frac{5}{4}\right) \quad y \quad r = \frac{7}{12}$

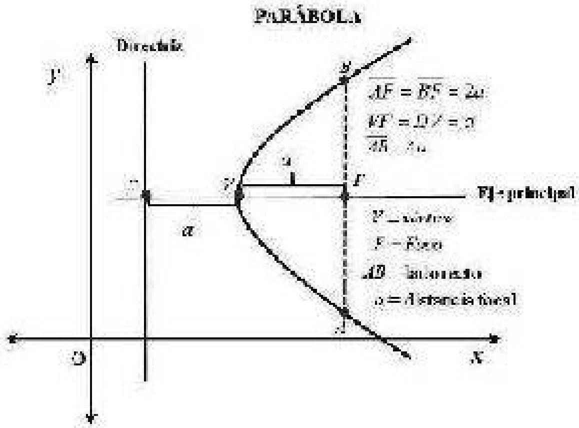
10. SECCIONES CÓNICAS.

10.1 LA PARÁBOLA.

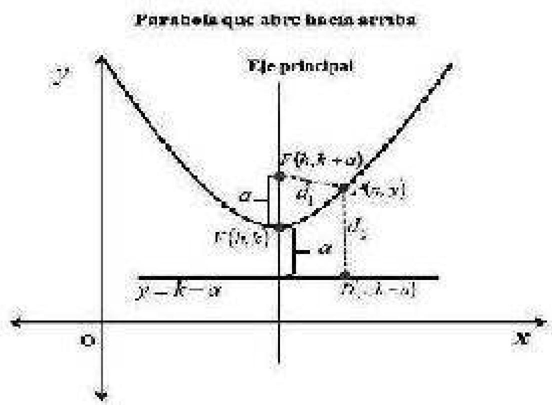
Definamos a la parábola como el lugar geométrico de todos los puntos cuyas distancias de un punto fijo a la curva y de la curva a una recta, siempre es la misma, al punto fijo lo llamamos foco y a la recta directriz.



Los elementos que contiene la parábola se muestran en la figura siguiente.



Construyamos la ecuación de una parábola con vértice en (h, k), Foco $(h, k + a)$ y como directriz la recta $y = k - a$, es decir una parábola que abre hacia arriba, como se indica en la siguiente figura.



Partiendo de la definición sabemos que:

$$d_1 = d_2$$

Donde $\boldsymbol{d_1}$ representa la distancia de un punto fijo (foco) a un punto al lugar geométrico (un punto sobre la curva) y $\boldsymbol{d_2}$ del lugar geométrico a un punto sobre una línea recta (directriz).

Determinemos las distancias.

$$d_1 = \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+a))^2} = \sqrt{x^2 - 2xh + h^2 + y^2 + k^2 + a^2 - 2ky - 2ay + 2ak}$$

$$d_2 = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(k-a))^2} = \sqrt{y^2 + k^2 + a^2 - 2ky + 2ay - 2ak}$$

$$\sqrt{x^2 - 2xh + h^2 + y^2 + k^2 + a^2 - 2ky - 2ay + 2ak} = \sqrt{y^2 + k^2 + a^2 - 2ky + 2ay - 2ak}$$

Simplificando obtenemos:

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 + k^2 + a^2 - 2ky - 2ay + 2ak = y^2 + k^2 + a^2 - 2ky + 2ay - 2ak$$

$$x^2 - 2xh + h^2 - 2ay + 2ak = 2ay - 2ak$$

$$(x-h)^2 = 2ay + 2ay - 2ak - 2ak$$

$$(x-h)^2 = 4ay - 4ak$$

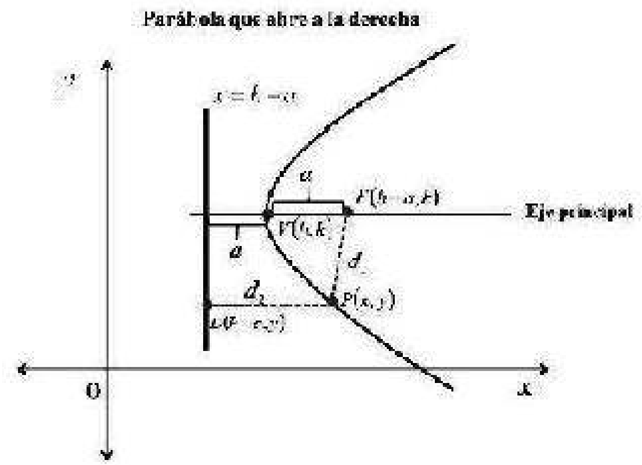
Por lo tanto, la ecuación canónica de una parábola con vértice en $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$ con distancia al foco igual a "$\boldsymbol{a}$" que abre hacia arriba es:

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

Si el vértice de la parábola es el origen, entonces:

$$(h,k) = (0,0)$$

Ahora construyamos una parábola con vértice en (***h, k***), Foco (***h*** + ***a, k***) y como directriz la recta ***x*** = ***h*** – ***a***, es decir una parábola que abre hacia la derecha, como se indica en la siguiente figura.



Partiendo de la definición sabemos que

$$d_1 = d_2$$

Donde $\boldsymbol{d_1}$ representa la distancia de un punto fijo (foco) a un punto al lugar geométrico (un punto sobre la curva) y $\boldsymbol{d_2}$ del lugar geométrico a un punto sobre una línea recta (directriz).

Determinemos las distancias.

$$d_1 = \sqrt{\left(x-(h+a)\right)^2 + (y-k)^2} = \sqrt{x^2 + h^2 + a^2 - 2hx - 2ax + 2ah + y^2 - 2ky + k^2}$$

$$d_2 = \sqrt{\left(x-(h-a)\right)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{x^2 + h^2 + a^2 - 2hx + 2ax - 2ah}$$

Pero como las distancias deben ser iguales según la definición.

$$\sqrt{x^2 + h^2 + a^2 - 2hx - 2ax + 2ah + y^2 - 2ky + k^2} = \sqrt{x^2 + h^2 + a^2 - 2hx + 2ax - 2ah}$$

Simplificando obtenemos

$$x^2 + h^2 + a^2 - 2hx - 2ax + 2ah + y^2 - 2ky + k^2 = x^2 + h^2 + a^2 - 2hx + 2ax - 2ah$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 2ax + 2ax - 2ah - 2ah$$

$$(y-k)^2 = 4ax - 4ah$$

Por lo tanto, la ecuación de una parábola con vértice en (***h, k***) con distancia al foco igual a "***a***" que abre a la derecha es:

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

De igual manera podríamos obtener la ecuación de la parábola que abre hacia abajo o a la izquierda, obteniendo:

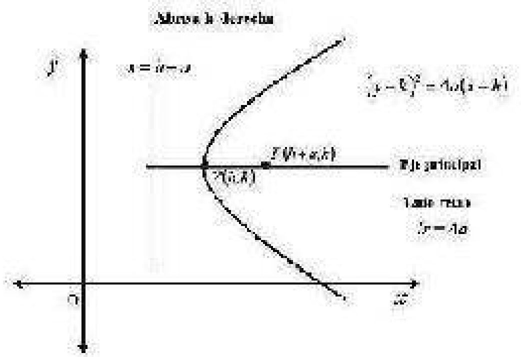
Para la ecuación de la parábola que abre hacia abajo es:

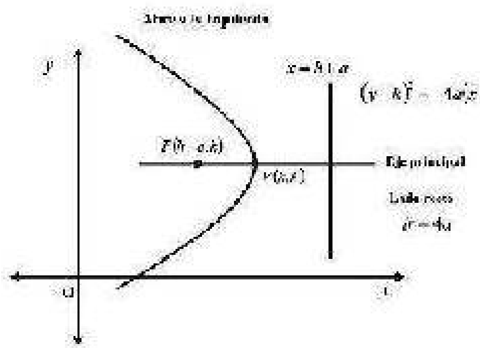
$$(x-h)^2 = -4a(y-k)$$

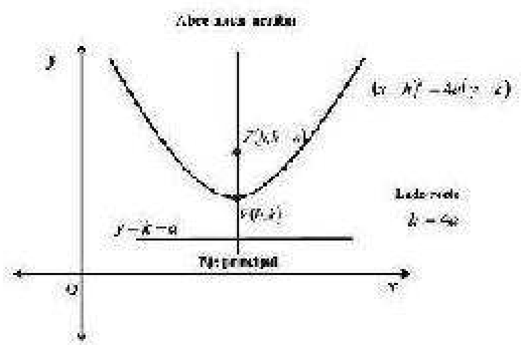
Y para la parábola que abre a la izquierda será:

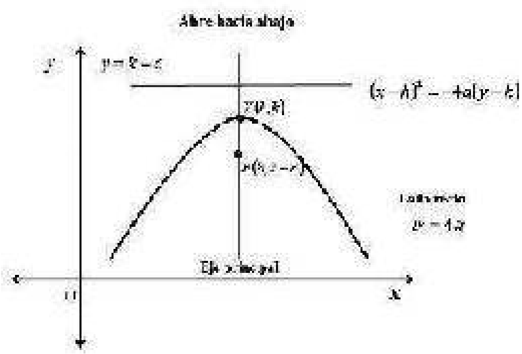
$$(y-k)^2 = -4a(x-h)$$

Podemos sintetizar la información necesaria para realizar análisis de la parábola en las siguientes cuatro figuras.









Cuando el vértice está localizado en el origen, consideramos: $(h,k) = (0,0)$

EJEMPLO

Encontrar la ecuación general de la parábola con distancia focal de 3 unidades, vértice (5,2) y que abre hacia arriba.

$$V(h,k)=V(5,2) \quad y \quad a=3$$

Como abre hacia arriba la ecuación canónica correspondiente será:

$$(x-h)^2 = 4a\cdot(y-k)$$

Sustituimos:

$$(x-5)^2 = 4(3)\cdot(y-2)$$

Desarrollamos:

$$x^2-10x+25=12y-24$$

$$x^2-10x-12y+25+24=0$$

La ecuación en su forma general será:

$$x^2-10x-12y+49=0$$

EJEMPLO

Encontrar la ecuación general de la parábola que abre a la izquierda, con lado recto igual a 20 unidades y vértice en el punto (–7,4)

Como el lado recto es:

$$lr=4a \quad \Rightarrow \quad 4a=20 \quad tenemos \quad a=\frac{20}{4}=5$$

Generándonos la siguiente información:

$$V(h,k)=V(-7,4) \quad y \quad a=5$$

Como abre hacia a la izquierda la ecuación canónica correspondiente será:

$$(y-k)^2=-4a\cdot(x-h)$$

Sustituimos:

$$(y-4)^2=-4(5)\cdot(x-(-7))$$

$$(y-4)^2=-4(5)\cdot(x+7)$$

Desarrollamos:

$$y^2-8y+16=-20x-140$$

$$y^2+20x-8y+16+140=0$$

La ecuación en su forma general será:

$$y^2+20x-8y+156=0$$

ACTIVIDAD 2. **Encuentra la ecuación general para cada una de las parábolas siguientes.**

1) $V(0,0) \quad y \quad F(10,0)$

2) $V(-3,-5) \quad y \quad a = 1$

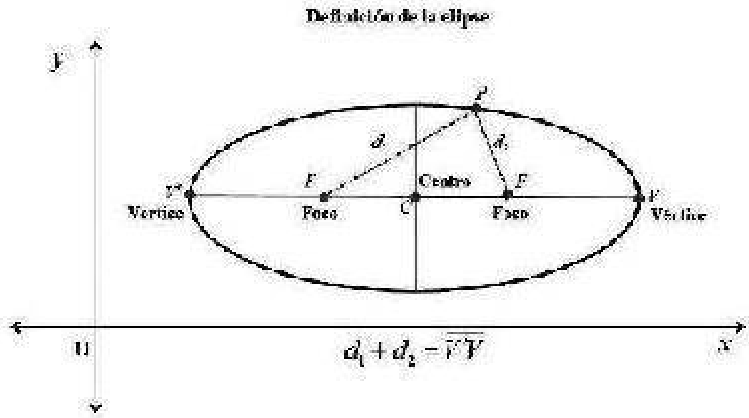
3) $V(7,8) \quad y \quad F(7,12)$

4) $V\left(\frac{2}{3},\frac{5}{4}\right) \quad y \quad lr = 5$

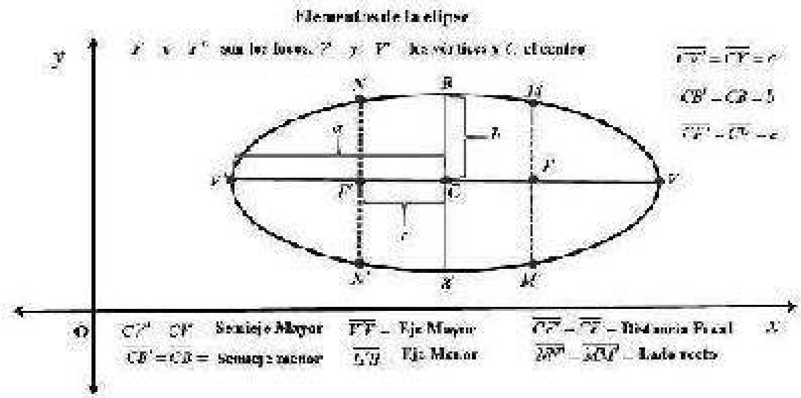
5) $V(4,5) \quad y \quad a = \frac{7}{5}$

10.2 LA ELIPSE.

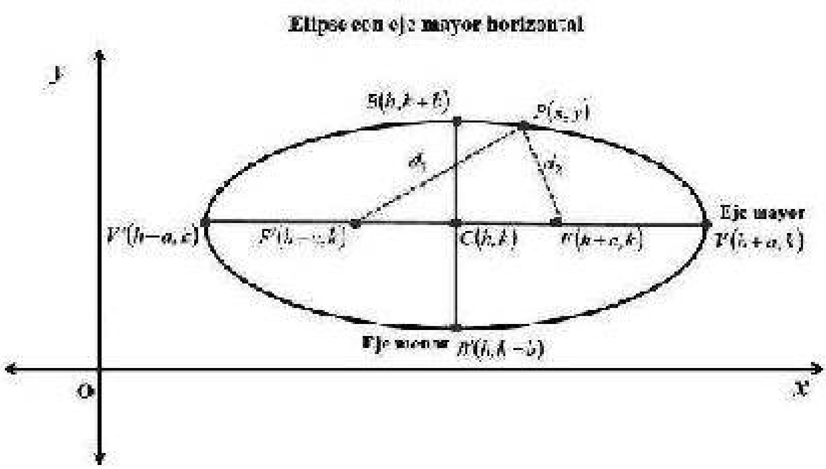
Definamos a la elipse como el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de distancias de la curva a dos puntos fijos es constante, los puntos fijos los llamamos focos y la distancia constante se refiere a la longitud entre los vértices de la figura.



Los elementos que contiene la elipse se muestran en la figura siguiente.



Construyamos la ecuación de una elipse con vértices en: ***V′*** (***h – a, k***) y ***V*** (***h + a, k***), Focos en ***F′*** (***h – c, k***) y ***F*** (***h + c, k***) y centro ***C*** (***h, k***).



Determinemos las distancias de cada uno de los focos al punto ***P* (*x, y*)** sobre la curva.

$$\overline{PF'} = d_1 = \sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-k)^2} = \sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx + 2cx - 2ch + (y-k)^2}$$

$$\overline{PF} = d_2 = \sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2} = \sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2}$$

Determinemos las distancias de cada uno de los focos al punto ***P* (*x, y*)** sobre la curva.

$$d_1 + d_2 = \overline{V'V}$$

Es decir:

$$d_1 + d_2 = 2a$$

Realicemos la suma de las distancias y simplifiquemos la expresión.

$$\sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx + 2cx - 2ch + (y-k)^2} + \sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx + 2cx - 2ch + (y-k)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx + 2cx - 2ch + (y-k)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2}\right)^2$$

$$x^2 + h^2 + c^2 - 2hx + 2cx - 2ch + (y-k)^2 =$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2} + x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2$$

$$2cx - 2ch = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2} - 2cx + 2ch$$

$$4cx - 4ch = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2}$$

$$a\sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2} = a^2 + ch - cx$$

$$a\sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2} = a^2 + ch - cx^2$$

$$a^2\left(x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2\right) = a^4 + c^2h^2 + c^2x^2 + 2a^2ch - 2a^2cx - 2c^2hx$$

$$a^2x^2 + a^2h^2 + a^2c^2 - 2a^2hx - 2a^2cx + 2a^2ch + a^2(y-k)^2 = a^4 + c^2h^2 + c^2x^2 + 2a^2ch - 2a^2cx - 2c^2hx$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 - 2a^2hx + 2c^2hx + a^2h^2 - c^2h^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 + 2a^2ch - a^2c^2 - 2a^2ch$$

$$x^2(a^2 - c^2) - 2hx(a^2 - c^2) + h^2(a^2 - c^2) + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$(a^2 - c^2)(x^2 - 2hx + h^2) + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\frac{(a^2 - c^2)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Considerando que en el caso de la elipse se cumple:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

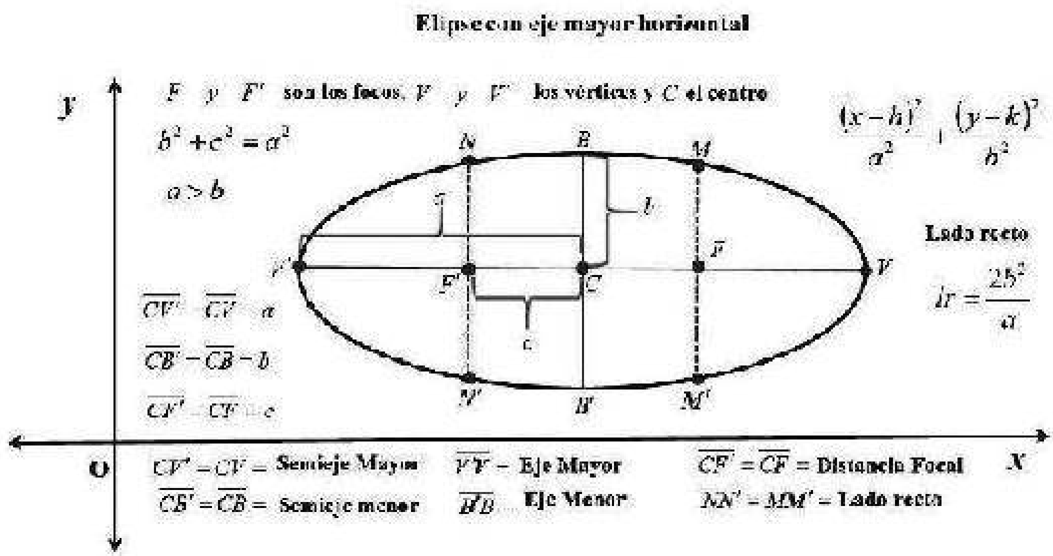
Por lo tanto, la ecuación canónica de la elipse con eje mayor horizontal y centro **C (h, k)** se puede escribir mediante la expresión:

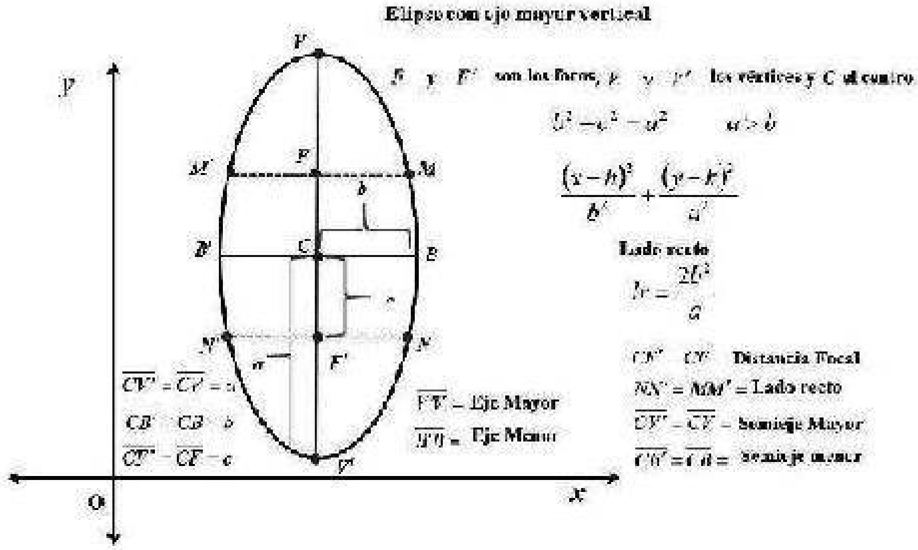
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si construyéramos la ecuación de la elipse con eje mayor vertical y cuyo centro fuera **C (h, k)** llegaríamos a la siguiente ecuación canónica.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Podemos sintetizar la información necesaria para realizar análisis de la elipse en las siguientes dos figuras.





Cuando el centro está localizado en el origen, consideramos:

EJEMPLO

Encontrar la ecuación general de la elipse con centro (3, 2), semieje eje menor igual a 4 y semieje mayor horizontal e igual a 5.

Semieje mayor = 5, **y semieje menor** = 4:

$$\Rightarrow \quad C(3,2), \quad a = 5 \quad y \quad b = 4$$

Como el semieje mayor es horizontal, entonces la ecuación canónica apropiada será:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Sustituimos:

$$\frac{(x-3)^2}{(5)^2} + \frac{(y-2)^2}{(4)^2} = 1$$

Desarrollamos:

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{25} + \frac{y^2 - 4y + 4}{16} = 1$$

$$16(x^2 - 6x + 9) + 25(y^2 - 4y + 4) = 400$$

$$16x^2 - 96x + 144 + 25y^2 - 100y + 100 = 400$$

$$16x^2 + 25y^2 - 96x - 100y + 144 + 100 - 400 = 0$$

La ecuación en su forma general será:

$$16x^2 + 25y^2 - 96x - 100y - 156 = 0$$

EJEMPLO **Encontrar la ecuación general de la elipse con centro (-4, -5), lado recto = 2, y el semieje menor es horizontal e igual a 2.**

Lado recto = 2 y semieje menor = 2:

$$\Rightarrow \quad lr = 2 \quad y \quad b = 2 \quad con \quad lr = \frac{2b^2}{a} \quad tenemos \quad a = \frac{2b^2}{lr} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2(2)^2}{2} = 4$$

$$\Rightarrow \quad C(-4,-5), \quad a = 4 \quad y \quad b = 2$$

Como el semieje menor es horizontal, entonces el eje mayor es vertical por lo que la ecuación canónica apropiada será:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Sustituimos:

$$\frac{(x-(-4))^2}{(2)^2} + \frac{(y-(-5))^2}{(4)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x+4)^2}{(2)^2} + \frac{(y+5)^2}{(4)^2} = 1$$

Desarrollamos:

$$\frac{x^2+8x+16}{4} + \frac{y^2+10y+25}{16} = 1$$

$$4(x^2+8x+16) + (y^2+10y+25) = 16$$

$$4x^2+32x+64+y^2+10y+25 = 16$$

$$4x^2+y^2+32x+10y+64+25-16 = 0$$

La ecuación en su forma general será:

$$4x^2+y^2+32x+10y+73 = 0$$

EJEMPLO

Encontrar la ecuación general de la elipse con centro el origen, donde uno de sus focos es el punto $(4, 0)$ y uno sus vértices $(-5, 0)$

Si observamos los puntos centro, foco y vértice nos podemos dar cuenta que el eje mayor es horizontal, donde la distancia del centro al foco es 4 y de igual manera la distancia del centro al vértice es 5.

$$\Rightarrow \quad C(0,0), \quad a = 5 \quad y \quad c = 4$$

Recordando que:

$$a^2 = c^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{(5)^2 - (4)^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

Como el eje mayor es horizontal, entonces la ecuación canónica apropiada será:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Sustituimos:

$$\frac{(x-0)^2}{(5)^2} + \frac{(y-0)^2}{(3)^2} = 1$$

Desarrollamos:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

La ecuación en su forma general será:

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$

ACTIVIDAD 3. Encuentra la ecuación general para cada una de las elipses siguientes.

1) Elipse con centro $(3, 7)$, un vértice en $(3, 1)$ y un foco en $(3, 10)$:

2) La elipse con centro el origen, semieje mayor horizontal e igual a 7 y semieje menor igual a 4.

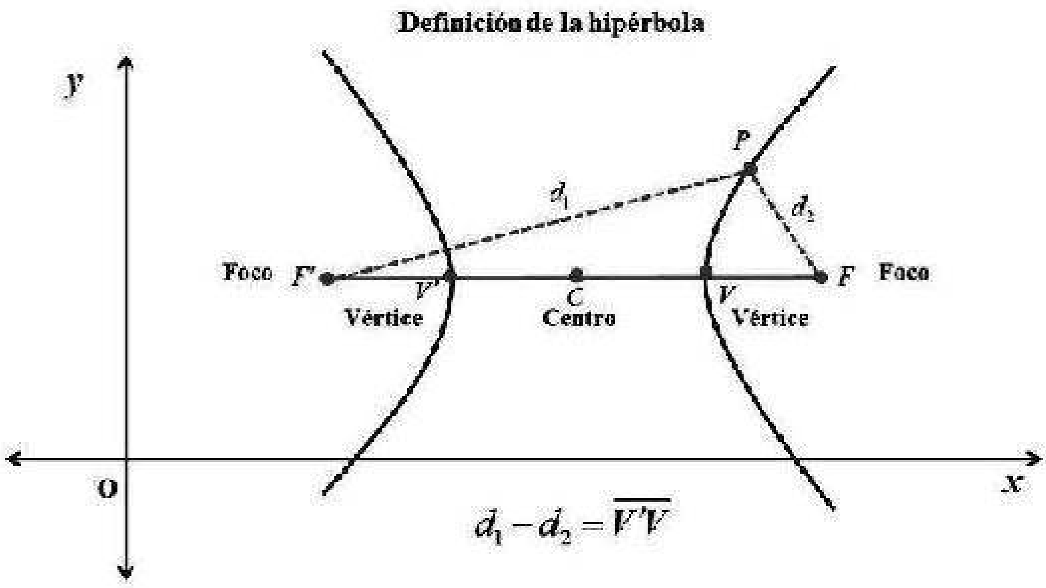
3) Los vértices de una elipse son los puntos $(-11,9)$ y $(-11,19)$, uno de sus focos es el punto $(-11, 10)$.

4) Una elipse con eje mayor horizontal tiene su centro en $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right)$, el semieje mayor mide 10 y la distancia del centro al foco es de 6.

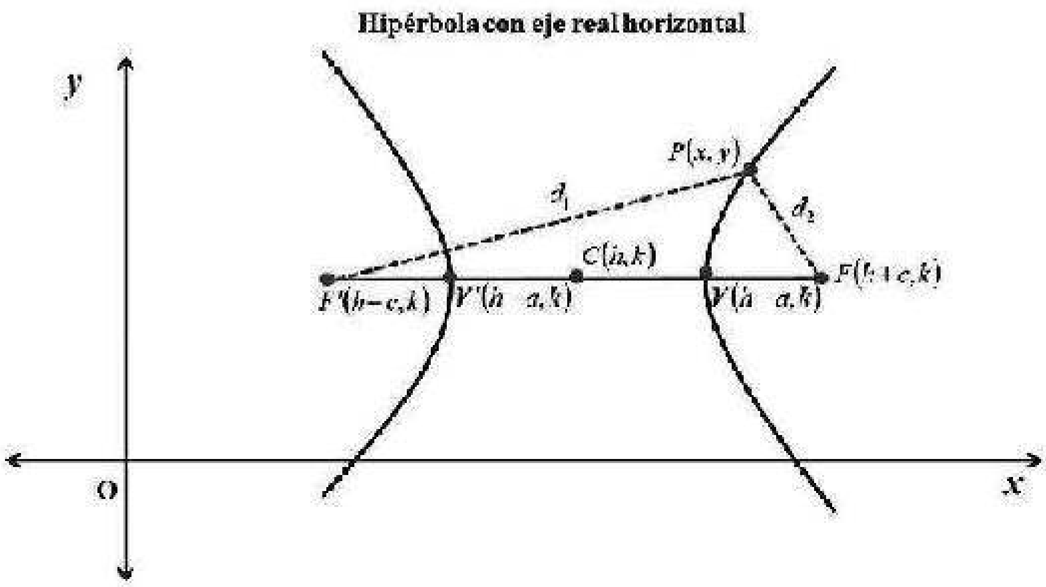
5) Los extremos del eje mayor de una elipse son los puntos $(-4, 6)$ y $(-4, 0)$, mientras los extremos del eje menor son los puntos $(-2,3)$ y $(-6, 3)$.

10.3 LA HIPÉRBOLA

Definamos a la hipérbola como el lugar geométrico de todos los puntos cuya diferencia de distancias de la curva a dos puntos fijos es constante, los puntos fijos los llamamos focos y la distancia constante se refiere a la longitud entre los vértices de la figura.



Construyamos la ecuación de una hipérbola con vértices $V'(h - a, k)$ y $V(h + a, k)$, Focos en $F'(h - c, k)$ y $F(h + c, k)$ y centro $C(h, k)$.



Determinemos las distancias de cada uno de los focos al punto ***P* (*x*, *y*)** sobre la curva.

$$\overline{PF'} = d_1 = \sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-k)^2} = \sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx + 2cx - 2ch + (y-k)^2}$$

$$\overline{PF} = d_2 = \sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2} = \sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2}$$

La diferencia de distancias debe de cumplir la siguiente condición.

$$d_1 - d_2 = \overline{V'V}$$

Es decir.

$$d_1 - d_2 = 2a$$

Realicemos la suma de las distancias y simplifiquemos la expresión.

$$\sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx + 2cx - 2ch + (y-k)^2} - \sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx + 2cx - 2ch + (y-k)^2} = 2a + \sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx + 2cx - 2ch + (y-k)^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2}\right)^2$$

$$x^2 + h^2 + c^2 - 2hx + 2cx - 2ch + (y-k)^2 =$$

$$4a^2 + 4a \cdot \sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2} + x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2$$

$$2cx - 2ch = 4a^2 + 4a \cdot \sqrt{x^2 + h^2 + c^2 - 2hx - 2cx + 2ch + (y-k)^2} - 2cx + 2ch$$

$$4cx-4ch=4a^2+4a\cdot\sqrt{x^2+h^2+c^2-2hx-2cx+2ch+(y-k)^2}$$

$$c(x-h)=a^2+a\cdot\sqrt{x^2+h^2+c^2-2hx-2cx+2ch+(y-k)^2}$$

$$c(x-h)-a^2=a\cdot\sqrt{x^2+h^2+c^2-2hx-2cx+2ch+(y-k)^2}$$

$$\left(c(x-h)-a^2\right)^2=\left(a\cdot\sqrt{x^2+h^2+c^2-2hx-2cx+2ch+(y-k)^2}\right)^2$$

$$c^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)+a^4=a^2\cdot\left(x^2+h^2+c^2-2hx-2cx+2ch+(y-k)^2\right)$$

$$c^2(x-h)^2-2a^2cx+2a^2ch+a^4=\cdot a^2x^2+a^2h^2+a^2c^2-2a^2hx-2a^2cx+2a^2ch+a^2(y-k)^2$$

$$c^2(x-h)^2-a^2x^2+2a^2hx-a^2h^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$$

$$\left(c^2-a^2\right)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$$

$$\frac{\left(c^2-a^2\right)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2\left(c^2-a^2\right)}{a^2\left(c^2-a^2\right)}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{c^2-a^2}=1$$

Considerando que en el caso de la hipérbola se cumple:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Podemos decir, por lo tanto, que la ecuación canónica de la hipérbola con eje real horizontal y centro $\boldsymbol{C\ (h,\ k)}$ se puede escribir mediante la expresión:

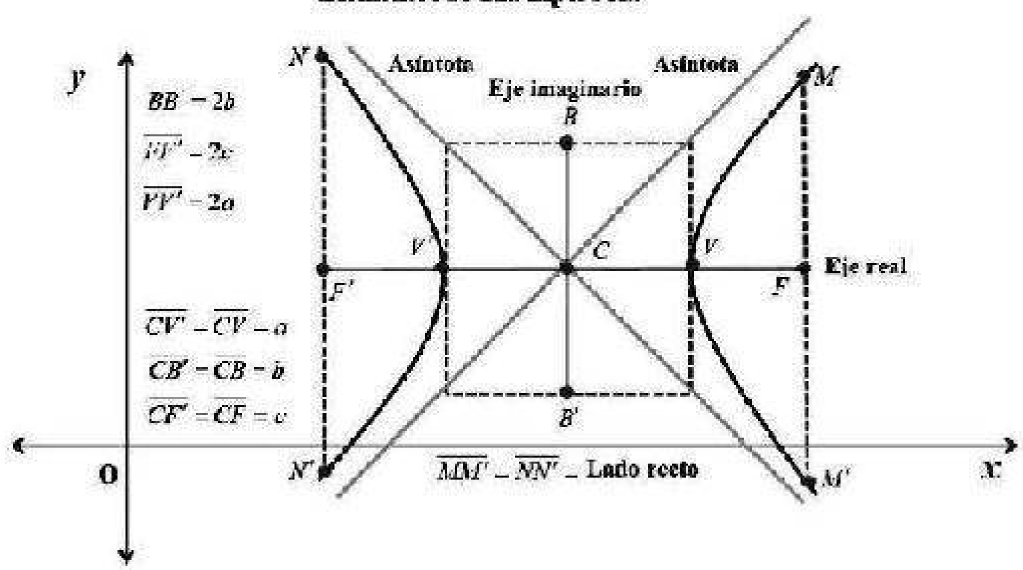
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si construyéramos la ecuación canónica de la hipérbola con eje real vertical y centro $\boldsymbol{C\ (h,\ k)}$ llegaríamos a la expresión:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

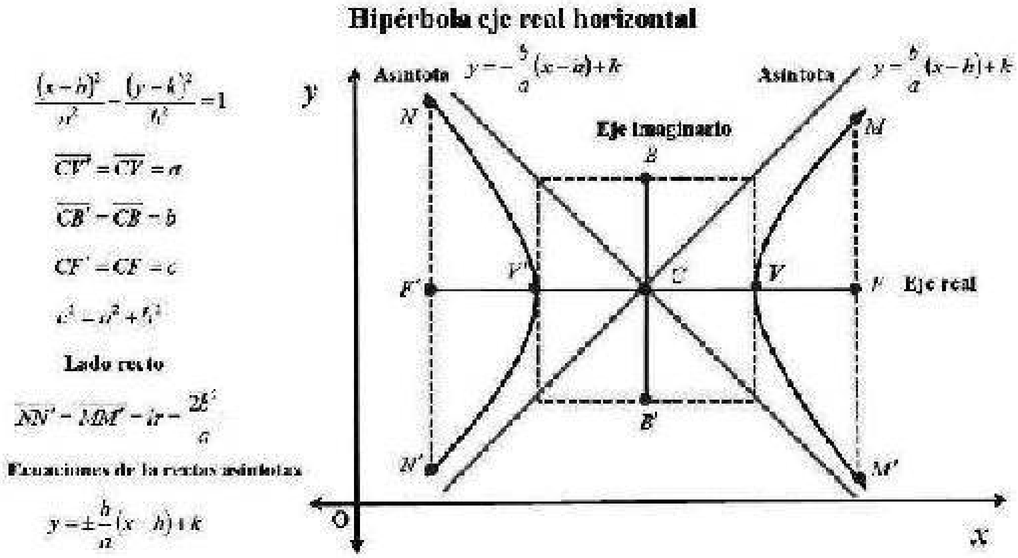
La hipérbola tiene un par de rectas asíntotas las cuales se muestran en la siguiente figura, donde además se muestran otros elementos.

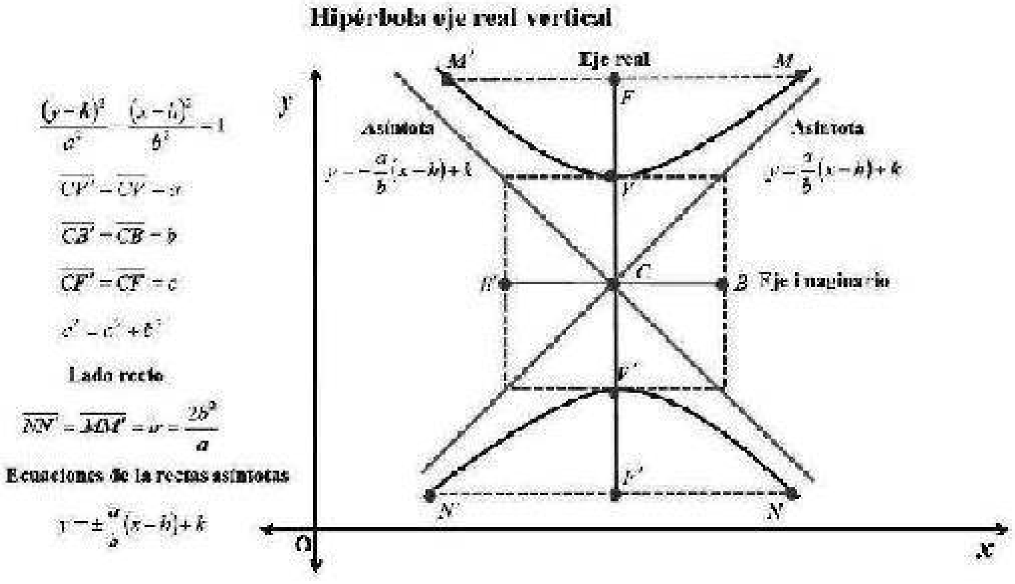
Elementos de una hipérbola



Una recta asíntota, es una línea recta que al extenderse se acerca cada vez más a una curva, en este caso, cada una de este par de rectas al prolongarse en ambos sentidos se acerca a la hipérbola.

Podemos sintetizar la información necesaria para realizar análisis de la hipérbola en las siguientes dos figuras.





Cuando el centro está localizado en el origen, consideramos: $(h, k) = (0, 0)$

EJEMPLO

Encontrar la ecuación general de la hipérbola con centro (2,3), con un foco en (7, 3) y un vértice (–1,3).

Por la ubicación de los puntos, podemos decir que el eje real es horizontal, la distancia entre el centro y su vértice es 3 y de su centro al foco es de 5, con lo que podemos establecer lo siguiente:

$$\Rightarrow C\,(2,3),\ \ a=3 \ \text{ y } \ c=5$$

Como:

$$c^2=a^2+b^2 \quad \Rightarrow \quad b=\sqrt{c^2-a^2} \quad \Rightarrow \quad b=\sqrt{(5)^2-(3)^2}=\sqrt{25-9}=4$$

Como el eje real es horizontal, entonces la ecuación canónica apropiada será:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Sustituimos:

$$\frac{(x-2)^2}{(3)^2}-\frac{(y-3)^2}{(4)^2}=1$$

Desarrollamos:

$$\frac{x^2-4x+4}{9}-\frac{y^2-6y+9}{16}=1$$

$$16\left(x^2-4x+4\right)-25\left(y^2-6y+9\right)=144$$

$$16x^2-64x+64-25y^2+150y-225=144$$

$$16x^2-25y^2-64x+150y+64-225-144=0$$

La ecuación en su forma general será:

$$16x^2-25y^2-64x+150y-305=0$$

EJEMPLO

Encontrar la ecuación general de la hipérbola con centro (-5, -8), el vértice es el punto (-5, -4), lado recto igual a 24.

Por la ubicación del centro y el vértice, podemos decir que el eje real es vertical y que están separados 4, con lado recto igual a 24.

$$\Rightarrow C\,(-5,\,8),\ \ a = 4\ \text{ y }\ Ir = 24$$

Como:

$$lr = \frac{2b^2}{a} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{\frac{a \cdot lr}{2}} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{\frac{4(24)}{2}} = \sqrt{48} = 4 \cdot \sqrt{3}$$

Como el eje real es vertical, entonces la ecuación canónica apropiada será:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Sustituimos:

$$\frac{(y-(-8))^2}{(4)^2} - \frac{(x-(-5))^2}{\left(4 \cdot \sqrt{3}\right)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(y+8)^2}{(4)^2} - \frac{(x+5)^2}{\left(4 \cdot \sqrt{3}\right)^2} = 1$$

Desarrollamos:

$$\frac{y^2 + 16y + 64}{16} - \frac{x^2 + 10x + 25}{48} = 1$$

$$3\left(y^2 + 16y + 64\right) - \left(x^2 + 10x + 25\right) = 48$$

$$3y^2 + 48y + 192 - x^2 - 10x - 25 = 48$$

$$3y^2 - x^2 - 10x + 48y + 192 - 25 - 48 = 0$$

La ecuación en su forma general será:

$$3y^2 - x^2 - 10x + 48y + 119 = 0$$

EJEMPLO **Encontrar la ecuación general de la hipérbola con centro en el origen y eje real horizontal, la longitud entre el centro y cada uno de sus vértices es de 5, además, el lado recto es de 10.**

Por la ubicación del centro y el vértice, podemos decir que el eje real es vertical y que están separados 4, con lado recto igual a 24.

$$\Rightarrow \quad C(0,0), \quad a = 5 \quad y \quad lr = 10$$

Como:

$$lr = \frac{2b^2}{a} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{\frac{a \cdot lr}{2}} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{\frac{5(10)}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

Como el eje real es horizontal, entonces la ecuación canónica apropiada será:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Sustituimos:

$$\frac{(x-0)^2}{(4)^2} - \frac{(y-0)^2}{(5)^2} = 1$$

Desarrollamos:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$$

$$25x^2 - 16y^2 = 400$$

La ecuación en su forma general será:

$$25x^2 - 16y^2 - 400 = 0$$

ACTIVIDAD 4. Encuentra la ecuación general para cada una de las hipérbolas siguientes

1) Hipérbola con centro $(7,3)$, un vértice en $(10, 3)$ y un foco en $(-1, 3)$:

2) La hipérbola con centro el origen, uno de sus vértices en $(-5, 0)$ y lado recto igual a 20.

3) Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-11,9)$ y $(-11,19)$, uno de sus focos es el punto $(-11, 5)$.

4) Una hipérbola con eje real horizontal tiene su centro en $\left(\frac{3}{2}, \frac{-4}{5}\right)$, la distancia del centro a un vértice es 2 y del centro a un foco 3.

5) Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-4, 6)$ y $(-4, 0)$, mientras los extremos del eje imaginario son los puntos $(-2, 3)$ y $(-6, 3)$.

11. ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Como pudimos darnos cuenta en los temas anteriores, nuestra tarea se enfocó en establecer la ecuación general de segundo grado para la circunferencia y las secciones cónicas, partiendo de sus características geométricas, construíamos la ecuación canónica la cual al desarrollarla nos permitía representarla en su forma general.

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ahora, lo que vamos hacer, es convertir la ecuación general de segundo grado en la ecuación canónica, y de esta forma es más sencillo obtener la información geométrica.

Lo primero que tenemos que hacer para lograr esto, es observar algunos coeficientes de la ecuación general de segundo, para saber que curva estamos buscando.

Veamos las siguientes características:

Dada la ecuación de segundo grado:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- ✓ Si $\boldsymbol{A = B}$, lo que buscamos es una ***circunferencia***.
- ✓ Si $\boldsymbol{A}$ o $\boldsymbol{B}$, es igual a cero, lo que buscamos es una ***parábola***.
- ✓ Si $\boldsymbol{A \neq B}$, pero del mismo signo, lo que buscamos es una ***elipse***.
- ✓ Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, son de signos distintos, lo que buscamos es una ***hipérbola***.

Encontrar la ecuación canónica para cada uno de los siguientes ejemplos[8].

[8] El trazado de las gráficas se deja como trabajo de clase al estudiante.

EJEMPLO

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 18y - 24 = 0$$

Si comparamos con:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Nos damos cuenta que A y B son iguales, por lo tanto, lo que buscamos es una circunferencia.

Desarrollemos:

$$\frac{3x^2 + 3y^2 - 12x + 18y - 24 = 0}{3}$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 8 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 8$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 4 + 9 + 8$$

$$\left(x^2 - 4x + 4\right) + \left(y^2 + 6y + 9\right) = 21$$

La ecuación canónica para esta circunferencia será:

$$(x-2)^2 + (y+9)^2 = 21$$

Esta circunferencia tiene

$$C(2,-9) \quad y \quad r = \sqrt{21}$$

EJEMPLO

$3x^2 + 9x^2 + 15y - 9 = 0$

Si comparamos con:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Nos damos cuenta que B es igual a cero, por lo tanto, lo que buscamos es una parábola.

Desarrollemos:

$$\frac{3x^2 + 9x + 15y - 9 = 0}{3}$$

$$x^2 + 3x + 5y - 3 = 0$$

$$x^2 + 3x = -5y + 3$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = -5y + 3 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -5y + \frac{21}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -5\left(y - \frac{21}{20}\right)$$

La ecuación canónica para esta parábola será:

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -5\left(y - \frac{21}{20}\right)$$

Esta parábola abre hacia abajo, además:

$$V\left(-\frac{3}{2}, \frac{21}{20}\right) \quad y \quad lr = 5$$

EJEMPLO

$4x^2 + 3y^2 - 24x - 18y + 5 = 0$

Si comparamos con:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como A y B no son iguales, pero si del mismo signo, podemos decir, que lo que buscamos es una elipse.

Desarrollemos:

$$4x^2 - 24x + 3y^2 - 18y = -5$$

$$\left(4x^2 - 24x\right) + \left(3y^2 - 18y\right) = -5$$

$$4\left(x^2 - 6x\right) + 3\left(y^2 - 6y\right) = -5$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto:

$$4\left(x^2 - 6x + 9\right) + 3\left(y^2 - 6y + 9\right) = -5 + 4(9) + 3(9)$$

$$4(x-3)^2 + 3(y-3)^2 = 58$$

$$\frac{4(x-3)^2}{58} + \frac{3(y-3)^2}{58} = \frac{58}{58}$$

La ecuación canónica para esta elipse será:

$$\frac{(x-3)^2}{29/2} + \frac{(y-3)^2}{58/3} = 1$$

Esta elipse tiene su eje mayor vertical, además:

$$C(3,3), \quad a = \sqrt{\frac{58}{3}} \quad y \quad b = \sqrt{\frac{29}{2}}$$

EJEMPLO

$$\mathbf{x^2 - y^2 - 6x + 8y - 12 = 0}$$

Si comparamos con:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como A y B son de distinto signo, podemos decir, que lo que buscamos es una hipérbola.

Desarrollemos:

$$x^2 - 6x - y^2 + 8y = 12$$

$$\left(x^2 - 6x\right) - \left(y^2 - 8y\right) = 12$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto:

$$\left(x^2 - 6x + 9\right) - \left(y^2 - 8y + 16\right) = 12 + 9 - 16$$

$$(x-3)^2 - (y-4)^2 = 5$$

$$\frac{(x-3)^2 - (y-4)^2 = 5}{5}$$

La ecuación canónica para esta hipérbola será:

$$\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{(y-4)^2}{5} = 1$$

Esta hipérbola tiene su eje real horizontal, además:

$$C(3,4), \quad a = \sqrt{5} \quad y \quad b = \sqrt{5}$$

ACTIVIDAD 5.

Parte I :Determina la ecuación canónica para cada caso, y establece algunas características geométricas de la figura representada.

1) $2x^2 - 3y^2 - 6x + 8y - 12 = 0$

2) $4x^2 + 3y^2 - 5x + 9y - 2 = 0$

3) $3x^2 + 3y^2 - 8x + 5y - 7 = 0$

4) $3x^2 - 3y^2 - 8x + 5y - 7 = 0$

5) $5y^2 - 8x + 5y - 40 = 0$

Parte II: En hojas cuadriculadas traza las gráficas de los cuatro ejemplos de esta sección y de los ejercicios propuestos en la actividad 5.

EJERCICIO DE REPASO DE LA UNIDAD 3

Parte I: Encuentra la ecuación general de segundo grado para cada una de las figuras con las características indicadas.

1) Una parábola con centro $(5, 3)$ y foco $(1, 3)$.

2) Una hipérbola con centro $(-1,-4)$, uno de sus vértices $(6, -4)$ y uno de sus focos $(8, -4)$.

3) Una circunferencia con radio igual a 7 y como centro el origen.

4) Una elipse con centro $(-5,7)$, uno de sus focos $(-5, 12)$ y semieje menor 3.

5) Los vértices de una elipse son $(-3, 4)$ y $(15, 4)$ con semieje menor 5.

Parte II: Determina la ecuación canónica para cada caso, y establece algunas características geométricas de la figura representada. Realiza las gráficas en hojas cuadriculadas.

1) $4x^2 + 5y^2 - 12x + 15y + 1 = 0$

2) $4x^2 + 4y^2 + 12x - 16y + 1 = 0$

3) $4x^2 - 5y^2 - 5x + 4y - 1 = 0$

4) $-3x^2 - 3y^2 - 7x + 9y + 11 = 0$

5) $4x^2 - 11x + 13y + 15 = 0$

6) $5y^2 - 15x - 12y - 1 = 0$

7) $2x^2 - y^2 + 15y = 0$

8) $4x^2 + 5y^2 - x + 1 = 0$

9) $x^2 - 5y^2 - 1 = 0$

10) $7x^2 + 8y^2 - 9x + 10y - 12 = 0$

PROBLEMAS PARA PONERTE A PRUEBA

1.- Encontrar la ecuación general de una circunferencia que pase por los puntos $(3, 5)$, $(-5, 2)$ y $(7, -1)$:

2.- Encontrar la ecuación general de la circunferencia cuyas rectas tangentes son:

$$\ell_1 : \quad 2x + 3y - 5 = 0$$

$$\ell_2 : \quad 3x - 2y + 15 = 0$$

$$\ell_3 : \quad 4x - 5y + 12 = 0$$

3.- Una partícula se mueve en un plano, las longitudes: horizontal (x) y vertical (y) siguen las reglas de comportamiento expresadas a continuación:

$$x = 5t + 1$$
$$y = 3t^2 + 4t + 1$$

Donde t representa tiempo. ¿Cuál es la trayectoria de esta partícula?[9]

4.- Encuentra la ecuación general de una hipérbola con eje real horizontal, lado recto igual 4 y cuyas asíntotas son las rectas:

5. - Una de las leyes de Kepler, dice que los planetas siguen orbitas elípticas alrededor del sol, donde el sol ocupa la posición de uno de los focos. Si colocamos al sol en el origen de una gráfica. Determine la ecuación de la trayectoria para un planeta cuya excentricidad[10] orbital es $\frac{1}{10}$ y tiene un lado recto de $2\ UA$[11]. Considere el eje mayor horizontal:

6.- Los vértices de una hipérbola corresponden a los focos de una elipse, de igual forma, los focos de la hipérbola son los vértices de la elipse, si la ecuación de la hipérbola es:

$$3x^2 - 4y^2 + 24x - 36 + 96 = 0$$

Determina la ecuación general de la elipse.

7.- Hallar la ecuación general de una circunferencia que pasa por los puntos $(5, 4)$ y $(-1, 3)$, cuyo centro se encuentra sobre la recta:

$$2x - 5y + 3 = 0$$

8.- Hallar la ecuación de una circunferencia, concéntrica a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 5x + 3y - 7 = 0$$

Y que sea tangente a la recta $x + 4y + 3 = 0$

9.- Encontrar la ecuación de una parábola, cuyos extremos del lado recto son los puntos, $(5,10)$ y $(5, -2)$:

10.- Hallar la ecuación general una elipse con eje mayor horizontal y centro en el origen horizontal, excentricidad de 1/2 y lado recto 2.

---

[9] **Recomendación: Antes de empezar el problema, investiga en una fuente confiable que son las *ecuaciones paramétricas*. También puedes consultarlo con tu profesor de geometría analítica.**

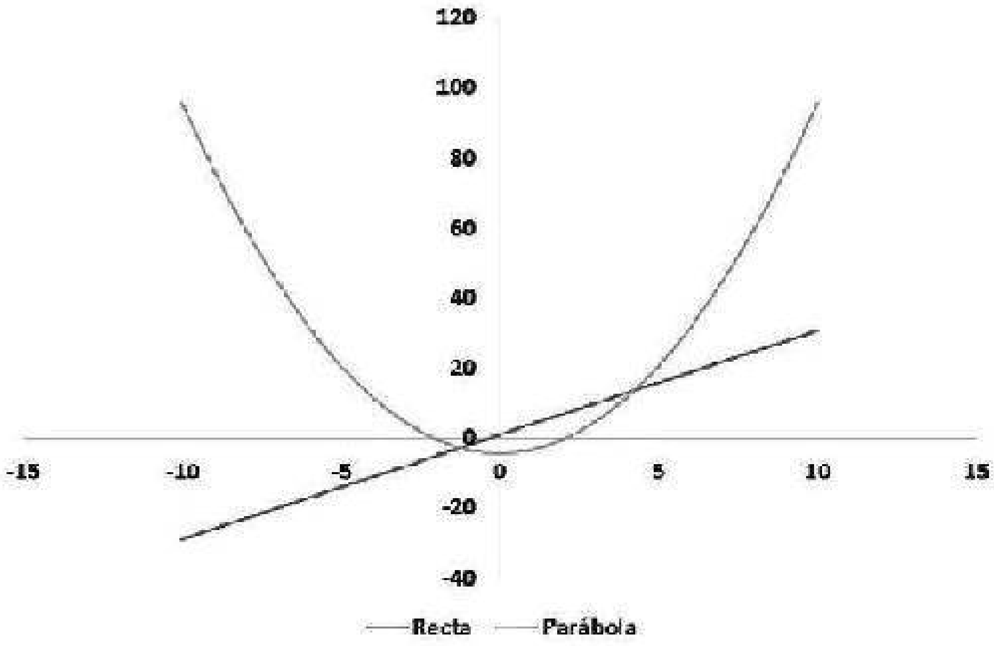
[10] **Recomendación: Antes de empezar el problema, investiga en una fuente confiable el concepto de *excentricidad*. O bien, lo puedes consultarlo con tu profesor de geometría analítica.**

[11] **UA es unidad astronómica, y equivale 149,597,871 Km, es decir, la distancia promedio entre el sol y la tierra.**

ACTIVIDADES SUGERIDAS PARA TRABAJAR

Construcción de rectas, circunferencias y cónicas

Utilicen alguna herramienta que les permita realizar gráficas, como hojas de cálculo (por ejemplo, ***Excel***) o software de matemáticas (por ejemplo, GeoGebra), son de utilidad para poder comprender los diferentes aspectos de las distintas figuras.



Podrías entre muchas cosas más:

a) Observar simplemente la gráfica.

b) Manipular distintos parámetros de la función y observar cómo cambia la figura.

c) Superponer distintas curvas y observar puntos de intersección.

Si no sabes por donde empezar consúltalo con tu profesor, seguramente él te podrá sugerir un sin número de actividades que podrías realizar con alguno de estos softwares.

BIBLIOGRAFÍA

Hernández Rodríguez, E., Vázquez Gallo, M. J., & Zurro Moro, M. Á. (2012). Algebra Lineal y Geometría. Madrid: Pearson.

Kindle, J. H. (1991). Geometría Analítica. Naucalpan de Juárez: McGraw-Hill.

Centro de información media

Fuente de consulta
https://www.uaa.mx/centros/cem/dmf/